Chap.30 : Limites finie ou infinie d'une fonction

1 Formalisation de la notion de limite

Dans ce qui suit, nous noterons :

- I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point ;
- f une fonction définie sur I ;
- a un point de I ou une borne finie de I.

1.1 Limite en un point ou en une borne finie

Définition 1.1. *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite ℓ en a lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \mid x - a \mid \leq \delta \Rightarrow \mid f(x) - \ell \mid \leq \varepsilon$$

On notera alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Interprétation géométrique :

Proposition 1.2. *La limite de f en a, lorsqu'elle existe, est unique.*

Définition 1.3. *On dit que f admet pour limite $+\infty$ en a lorsque :*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \mid x - a \mid \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A$$

On dit que f admet pour limite $-\infty$ en a lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \mid x - a \mid \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq A$$

On notera alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \pm\infty$.

Interprétation géométrique :

Application 1.4. *Soit* $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x sin(\frac{1}{x}) \end{cases}$.
Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Méthode 1.5. *Il découle de la définition de la limite en un point que :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(a+h) = \ell$$

On peut toujours ramener l'étude d'une limite en un point a *à l'étude d'une limite en* 0 *en posant* $x = a + h$.

Application 1.6. *Soit* $f : \begin{cases}]3; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^2-2x-3}{x-3} \end{cases}$. *Étudier la limite de* f *en 3.*

1.2 Limite à l'infini

Définition 1.7. ***Limite finie en l'infini.***

- *Si* $+\infty$ *est une borne de* I, *on dit que* f *admet pour limite finie* $\ell \in \mathbb{R}$ *en* $+\infty$ *lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq N \Rightarrow | f(x) - \ell | \leq \varepsilon$$

- *Si $-\infty$ est une borne de I, on dit que f admet pour limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en $-\infty$ lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq N \Rightarrow \mid f(x) - \ell \mid \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$ *ou* $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Interprétation géométrique :

Définition 1.8. ***Limite infinie en l'infini.***

- *Si $+\infty$ est une borne de I, on dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ lorsque :*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq N \Rightarrow f(x) \geq A$$

- *Si $-\infty$ est une borne de I, on dit que f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ lorsque :*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq N \Rightarrow f(x) \geq A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ *ou* $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Interprétation géométrique :

Définition 1.9. *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On appelle* ***voisinage*** *de a tout intervalle :*

- *ouvert centré en a si $a \in \mathbb{R}$;*
- *de la forme $[A; +\infty[$ si $a = +\infty$;*
- *de la forme $]-\infty; A]$ si $a = -\infty$;*

On note $\mathscr{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.
On dit qu'une propriété portant sur f est vraie au voisinage de a lorsqu'il existe $V \in \mathscr{V}(a)$ tel que la propriété soit vraie pour tout $x \in I \cap V$.

1.3 Voisinage et caractère borné

Remarque 1.10. *Toutes les définitions de limite précédentes peuvent être écrites de manière unifiée : f admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si :*

$$\forall V \in \mathscr{V}(l), \exists U \in \mathscr{V}(a), \forall x \in I, x \in U \Rightarrow f(x) \in W$$

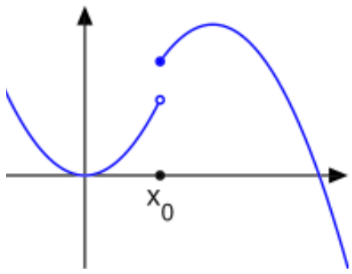
Proposition 1.11. *Si f admet une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ alors f est bornée au voisinage de a.*

1.4 Limite à droite, limite à gauche

Définition 1.12. *On dit que f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ **à droite** en a lorsque la restriction $\tilde{f}$ à l'ensemble $I \cap]a; +\infty[$ admet pour limite ℓ en a :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]a; +\infty[, | x - a | \leq \delta \Rightarrow | f(x) - \ell | \leq \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell$.

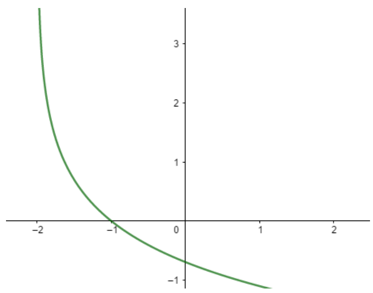


Définition 1.13. *On dit que f admet $+\infty$ comme limite à droite en a lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]a; +\infty[, | x - a | \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A$$

On note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$.

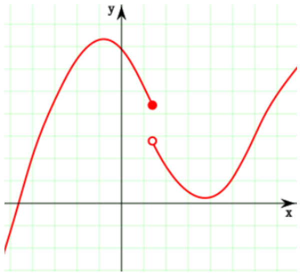
Exemple 1.14. $f(x) = -ln(2 + x)$



Définition 1.15. *On dit que f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ **à gauche** en a lorsque la restriction $\tilde{f}$ à l'ensemble $I \cap]-\infty; a[$ admet pour limite ℓ en a :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]-\infty; a[\,, \mid x - a \mid \leq \delta \Rightarrow \mid f(x) - \ell \mid \leq \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell$.

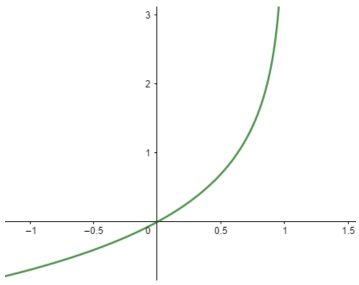


Définition 1.16. *On dit que f admet $+\infty$ comme limite à gauche en a lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]-\infty; a[\,, \mid x - a \mid \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A$$

On note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$.

Exemple 1.17. $f(x) = -ln(1 - x)$



Proposition 1.18. *Si $D_f = I - \{a\}$ avec $a \in I$ alors f admet une limite en a si ,et seulement si, f admet une limite à droite et à gauche en a avec :*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

Application 1.19. *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{ si } x \neq 0 \\ 2 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Admet-elle une limite en 0 *?*

Application 1.20. *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$f(x) = \begin{cases} xln(x) + 1 \ si \ x > 0 \\ e^x \ si \ x \leq 0 \end{cases}$$

Admet-elle une limite en 0 ?

Application 1.21. *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

Admet-elle une limite en 2 ?

1.5 Opérations sur les limites

Proposition 1.22. *Les résultats énoncés dans le cadre des limites des suites s'étendent aux calculs de limites pour les fonctions.*

Méthode 1.23. *pour calculer une limite éventuelle de f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on essaye en premier lieu d'appliquer les règles opératoires étudiées dans le chapitre 5 : "Calcul de limites en un point ou à l'infini".*
Pour cela, on décompose f à l'aide de fonctions usuelles (Cf. Chap.9 : Fonctions usuelles).

Application 1.24. *Étudier la limite en $+\infty$ de :*

1. $f : x \mapsto 3x^2 - 3x - 2$
2. $f : x \mapsto x^2 - e^x + ln(x)$

Application 1.25. *Soit* $f : x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{(x-1)(2+x)}$.

1. *Donner le domaine de définition de* f.
2. *Étudier les limite en* 1 *et en* -2.

Proposition 1.26. ***Composition d'une limite de suite et de fonction.***
Soit (u_n) *une suite d'éléments de* I.
Si $\lim u_n = a$ *et si* $\lim\limits_{x\to a} f(x)) = \ell$ *alors* $\lim f(u_n) = \ell$.

Méthode 1.27. *La propriété 1.26 est souvent utilisée pour démontrer qu'une fonction* f *n'a pas de limite en* a.
pour cela on raisonne par l'absurde et on utilise deux suites (u_n) *et* (v_n) *telles que les suites* $(f(u_n))$ *et* $(f(v_n))$ *ont des limites distinctes.*

Application 1.28. *La fonction* $f : x \mapsto sin(\frac{1}{x})$ *admet-elle une limite en 0 ?*

2 Théorèmes d'existence d'une limite

2.1 Dans une inégalité

Théorème 2.1. ***Compatibilité du passage à la limite.***

Soient deux fonctions f *et* g *admettant une limite en* a.
Si $f \leq g$ *au voisinage de* a *alors :*

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

Théorème 2.2. ***Théorème de comparaison.***

- *Si* $f \leq g$ *au voisinage de* a *et si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.
- *Si* $f \geq g$ *au voisinage de* a *et si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$.

Application 2.3. *1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, x-1 \leq x+sin(x)$.*

2. En déduire la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $f : x \mapsto x + sin(x)$.

Théorème 2.4. ***Théorème d'encadrement.***

Si $f \leq g \leq h$ au voisinage de a et si

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

alors : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$

Application 2.5. *Étudier la limite en 0 de $f : x \mapsto x\lfloor x \rfloor$*

Application 2.6. *Étudier la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto 2 + \frac{sin(x)}{x}$*

2.2 Théorème de la limite monotone

Théorème 2.7. *On suppose que $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ est* ***croissante*** *avec $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.*

- *Si f est majorée, alors elle admet une limite finie en b. Dans ce cas :*

$$\lim_{x \to b} f(x) = \sup_{x \in]a;b[} f(x)$$

- *Si f n'est pas majorée, alors :*

$$\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$$

Remarque 2.8. *Comme pour une suite, une fonction monotone se comporte "bien" vis-à-vis de la limite. En particulier une fonction monotone admet toujours une limite (finie ou infinie) aux bornes ouvertes de son intervalle de définition.*

Application 2.9.
1. *Montrer que* $A = \{ln(2^n), n \in \mathbb{N}\}$ *n'est pas majoré.*
2. *Démontrer que la fonction ln admet pour limite* $+\infty$ *en* $+\infty$*.*

Théorème 2.10. *On suppose que* $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ *est* ***croissante*** *avec* $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$*.*

- *Si f est minorée, alors elle admet une limite finie en a. Dans ce cas :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \inf_{x \in]a;b[} f(x)$$

- *Si f n'est pas minorée, alors :*

$$\lim_{x \to b} f(x) = -\infty$$