Exercices
Chap.11 : Espaces préhilbertiens réels

1 Produits scalaires

Exercice 1.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $(P,Q) \in E^2$ on pose :*

$$< P \mid Q >= \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i).$$

Montrer que $< . \mid . >$ définit un produit scalaire sur E.

Exercice 1.2. *Montrer que l'application $\langle . \mid . \rangle$ définie sur $E \times E$ où $E = \mathbb{R}[X]$ par :*

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1.3.

1. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On souhaite montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ est convergente.*
   (a) *Où cette intégrale est-elle impropre ?*
   (b) *Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2P(t)\mathrm{e}^{-t}$.*
   (c) *En déduire la nature de $\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.*
2. *On note $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $(P,Q) \in E^2$ on pose :*

$$< P \mid Q >= \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$$

.

   (a) *Justifier que $\langle P \mid Q \rangle \in \mathbb{R}$.*
   (b) *Montrer que $< . \mid . >$ définit un produit scalaire sur E.*

Exercice 1.4. *On souhaite montrer que l'application $\langle . \mid . \rangle$ définie sur $E\times E$ où $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $\langle A \mid B \rangle = \mathrm{tr}\left(A^T \times B\right)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. *Justifier rapidement que l'on a bien, pour A et B appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:*

$$\mathrm{tr}\left(A^T \times B\right) \in \mathbb{R}.$$

2. *Démontrer que l'application* $\langle . \mid . \rangle$ *est symétrique et bilinéaire.*
3. *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*. On note* $a_{i,j}$ *le coefficient de* A *situé sur la* $i^{\text{ème}}$ *ligne et la* $j^{\text{ème}}$ *colonne.*
   (a) *Montrer que* $\langle A \mid A\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}^2\right)$.
   (b) *En déduire que l'application* $\langle . \mid . \rangle$ *est positive et définie et conclure l'exercice.*

2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 2.1. *Soit* f *une fonction de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$*, à valeurs réelles, et telle que* $f(0) = 0$*.*
On souhaite montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 \leqslant x \int_0^x \left(f'(t)\right)^2 \, \mathrm{d}t.$$

1. *On suppose dans cette question que* $x > 0$*.*
   (a) *On considère l'espace vectoriel* $E = \left\{f \in \mathscr{C}^1([0;x], \mathbb{R}) / f(0) = 0\right\}$*.*
   On définit sur $E \times E$*, l'application* $\langle . \mid . \rangle$ *par :*
   $$\langle f \mid g\rangle = \int_0^x f'(t)g'(t)\mathrm{d}t.$$
   Montrer que cette application définit un produit scalaire sur E*.*
   (b) *Déterminer une fonction* $h \in E$*, que l'on explicitera, telle que* $\langle f \mid h\rangle = f(x)$*.*
   (c) *En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonction* f *et* h*, démontrer l'inégalité demandée.*
2. *Que peut-on dire* du *cas* $x = 0$ *?*
3. *On suppose maintenant que* $x < 0$*. Comment peut-on adapter la question 1 . pour démontrer l'inégalité demandée ?*

Exercice 2.2. *Montrer que :*

$$\forall\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 2.3. *Soient* a *et* b *deux réels tels que* $a < b$*. Montrer que si* f *est une fonction continue et strictement positive sur* $[a;b]$*, on a :*

$$\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right) \geqslant (b-a)^2$$

Étudier le cas d'égalité.

3 Orthogonalité

Exercice 3.1. *On note $E = \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et pour tout $(f, g) \in E^2$ on pose :*

$$< f \mid g >= \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que $< . \mid . >$ définit un produit scalaire sur E.*
2. *Montrer que les fonctions $f_n : t \mapsto \sin(nt), n \in \mathbb{N}^*$ forment une famille orthogonale de E et calculer la norme de ces fonctions.*

Exercice 3.2. *Soit E un espace préhilbertien et $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E vérifiant :*

$$\forall \vec{x} \in E \quad \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (< \vec{x} \mid \vec{a}_i >)^2$$

1. *Montrer que $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ est une famille orthogonale.*
2. *Soit $\vec{u} \in E$ et $\vec{y} = \sum\limits_{k=1}^{n} < \vec{u} \mid \vec{a}_k > \vec{a}_k$. Montrer que $\|\vec{u} - \vec{y}\|^2 = 0$.*
3. *En déduire que $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ est une base orthonormée de E.*

4 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Exercice 4.1. *On considère $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et F l'ensemble défini par*

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + 3z - t = 0\right\}$$

1. *Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base $\mathscr{B}$.*
2. *Grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base $\mathscr{B}$, construire une base orthonormale de F que l'on notera $\mathscr{C}$.*

Exercice 4.2. *On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique.*

1. *Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\mathscr{B} = ((1, 1, 1), (2, -1, 2), (1, 1, -2))$.*
2. *Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = (x, y, z)$ dans la base obtenue à la question précédente.*

Exercice 4.3. *On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ que l'on munit du produit scalaire :*

$$< P \mid Q >= \textstyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t. \text{ (cf. exercice 1.3).}$$

On note aussi $\mathscr{B}_c = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E.

1. *On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}, I_k = \int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$. D'après l'exercice 1.3 cette intégrale est bien convergente.*
   (a) *Donner la valeur de I_0.*
   (b) *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, I_{k+1} = (k+1)I_k$.*
   (c) *Démontrer alors par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}, I_k = k!$.*
2. *Déterminer une base orthonormale de E en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique de E.*
   On pensera à bien organiser ses calculs et à utiliser la question 1.c)

5 Projection orthogonale

Exercice 5.1. *On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire :*

$$< P \mid Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

On pose $F = \mathrm{Vect}(1, X)$.

1. *Le but de cette question est de calculer $p_F\left(X^2\right)$.*
   (a) *En exploitant l'information $p_F\left(X^2\right) \in F$, déterminer le degré du polynôme $p_F\left(X^2\right)$.*
   (b) *Quelle information a-t-on sur $X^2 - p_F\left(X^2\right)$?*
   (c) *À l'aide des deux questions précédentes déterminer $p_F\left(X^2\right)$.*
   On rappelle, qu'en dimension finie, $\vec{u} \in F^\perp$ si, et seulement si, $\vec{u}$ est orthogonal à chacun des vecteurs d'une base de F.
2. (a) *Justifier le fait que $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{inf} \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(X^2, F\right)^2$.*
   (b) *En déduire la valeur de $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{inf} \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2\ \mathrm{d}t$.*

6 Pour aller plus loin...

Exercice 6.1. *On munit l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire :*

$$\langle A|B >= \mathrm{tr}\left(A^T B\right).$$

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétrique réelles d'ordre n et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques d'ordre n.

1. (a) *Montrer que si $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ alors $A \perp B$.*
   (b) *Montrer que toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.*

  (c) En déduire que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$

2. *(a) Déterminer la projection orthogonale d'une matrice* $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *sur* $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que $\mathrm{d}\left(M, \mathscr{A}_n(\mathbb{R})\right) = \frac{1}{2}\left\|M + M^T\right\|$ *pour tout* $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   (c) Calculer $\mathrm{d}\left(M, \mathscr{A}_n(\mathbb{R})\right)$ *pour* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.2. *On munit* $\mathbb{R}[X]$ *du produit scalaire suivant :*

$$< P \mid Q >= \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on note* T_n *le polynôme de Tchebychev de première espèce, c'est-à-dire l'unique polynôme vérifiant :*

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

1. *Déterminer, pour tout* $x \in \mathbb{R}, T_0(x), T_1(x), T_2(x)$ *et* $T_3(x)$ *en fonction de* x.
2. *Vérifier que* $< . \mid . >$ *est bien un produit scalaire.*
3. *Montrer que* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une famille orthogonale de* $\mathbb{R}[X]$.
4. *Construire une famille orthonormale à partir de* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. *Soit* $F = \mathrm{Vect}(1, X)$. *Calculer* $\mathrm{d}\left(X^2, F\right)$.

Exercice 6.3. *Soit* E *un espace euclidien et* $p \in \mathscr{L}(E)$ *une projection. Montrer que les trois affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. p *est une projection orthogonale (c'est-à-dire* $\ker(p) = \mathrm{Im}(p)^{\perp}$*).*
2. $\forall (u, v) \in E^2, < u|p(v) >=< p(u)|v >$.
3. $\forall u \in E, \|p(u)\| \leqslant \|u\|$