Exercices
Fonctions de plusieurs variables

1 Domaines de $\mathbb{R}^2$

Exercice 1.1. *On considère le plan muni d'un repère orthonormal. Représenter graphiquement les ensembles de points suivants :*

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geqslant 0 \ \text{ et } \ y \geqslant x\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 1 \ \text{ et } y \geqslant 0 \ \text{ et } \ y + x - 3 \leqslant 0\}$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 4\}$
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0 \ \text{ et } \ x^2 + y^2 \geqslant 1\}$
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geqslant 0 \ \text{ et } y \geqslant 0 \ \text{ et } 3y + x - 12 \leqslant 0 \ \text{ et } \ 3x + y - 12 \leqslant 0\}$
6. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x + y| < 1 \ \text{ et } \ x - y < 1\}$

Indiquer ensuite si chacune des ces parties est : ouverte ? fermée ? bornée ?

2 Calcul différentiel

Exercice 2.1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :*

$$f(x, y, z) = \sin^2(x) + \cos^2(y) + z^2.$$

1. *Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.*
2. *Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.*
3. *Donner le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage du point $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 1\right)$.*

Exercice 2.2. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :*

$$f(x, y, z) = \mathrm{e}^{x^2 y} \sin(xz).$$

1. *Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$*
2. *Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.*

Exercice 2.3. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x, y) = \arctan(2x + y).$$

1. *Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.*

2. *Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.*
3. *Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.*

Exercice 2.4. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 des trois fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$:*

1. $f(x,y) = \varphi\left(x^2 - y^2\right)$
2. $g(x,y) = \varphi(xy)$
3. $h(x,y) = \int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)dt$

Exercice 2.5. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.*
On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $F(x,y) = f(x+\varphi(y))$.

1. *Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:*

$$\tfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)\tfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) - \tfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)\tfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0$$

3 Équations aux dérivées partielles

Exercice 3.1. *A l'aide du changement de variables $\left\{\begin{array}{l} x = u + 2v \\ y = -v \end{array}\right.$, déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

Exercice 3.2. *On pose $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.*
A l'aide des coordonnées polaires, déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U vérifiant l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

Exercice 3.3. *A l'aide du changement de variable $\left\{\begin{array}{l} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{array}\right.$, déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 5\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + 6\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x + y$$

Exercice 3.4. *On souhaite résoudre sur* $\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$ *l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad (E)$$

Pour cela on considère le changement de variables $\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$ *et on définit une nouvelle fonction* g *de classe* $\mathscr{C}^2$ sur $\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$ *par :*

$$f(x,y) = g(u,v) = g\left(xy, \tfrac{x}{y}\right)$$

1. *Calculer* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ *en fonction des dérivées partielles de* g.
2. *Montrer que* f *est solution de* (E) *si, et seulement si,* g *est solution de l'équation :*

$$2u\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0 \quad (E_1)$$

3. *Afin de résoudre l'équation* (E_1) *on pose* $h(u,v) = \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$. *Quelle est l'équation vérifiée par* h? *Résoudre cette équation.*

   On pourra remarquer que dans l'équation vérifiée par h *la variable* v *n'intervient pas donc l'équation vérifiée par* h *est "comme" une équation différentielle d'ordre 1 classique.*
4. *En déduire que* f *est solution de l'équation* (E) *si, et seulement s'il existe deux fonctions* A *et* B *de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *telles que :*

$$f(x,y) = A\left(\tfrac{x}{y}\right)\sqrt{xy} + B(xy).$$

4 Extremum d'une fonction de deux variables

Exercice 4.1. *Soit* h *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1.$$

1. (a) *Justifier que* h *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.
   (b) *Justifier que* h *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ *et calculer ses dérivées partielles premières en tout point de cet ensemble.*
   (c) h *possède-t-elle des dérivées partielles premières en* $(0,0)$ *?*
2. (a) *Montrer que* $\mathscr{U} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < \sqrt{x^2+y^2} < 2\right\}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$.
   (b) h *a-t-elle des points critiques dans* $\mathscr{U}$ *?*

(c) *Justifier que h est bornée sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ et qu'elle y atteint ses bornes, puis déterminer les points de D en lesquels ces bornes sont atteintes.*

Exercice 4.2. *On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni dur repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x,y) = (x-y)^3 - 6xy$$

1. *Représenter graphiquement le domaine T.*
2. *Déterminer les extremums globaux de f sur T. Attention à ne pas développer l'expression de f pour le calcul des dérivées partielles*

Exercice 4.3. *On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni dur repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.*
Soit

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leqslant 4\}$$

et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \left(2x^2 + 3y^2\right) \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

1. *Représenter graphiquement le domaine D.*
2. *Déterminer les extremums globaux de f sur D.*

5 Surfaces

Exercice 5.1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x,y) = \cos(x-y).$$

Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point A de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, 0, f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)\right)$.

Exercice 5.2. *Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $x^2+y^2+2z^2 = 1$ et $\mathscr{D}$ la droite définie par $\begin{cases} y = 3x \\ z = -2x \end{cases}$. On pose :*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 1.$$

1. *Quels sont les points réguliers de la surface $\mathscr{S}$?*
2. *Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathscr{D}$.*
3. *Soit $A(a,b,c)$ un point régulier de $\mathscr{S}$. Que peut-on dire du vecteur $\nabla_{(a,b,c)} f$ par rapport au plan tangent à $\mathscr{S}$ en A ?*
4. *À l'aide des trois questions précédentes déterminer le ou les points de $\mathscr{S}$ en lesquels le plan tangent à $\mathscr{S}$ est orthogonal à $\mathscr{D}$.*

Exercice 5.3. *Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $z^3 = xy$ et $\mathscr{D}$ la droite définie par :* $\left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3z - 3 \end{array}\right.$
Déterminer les plans tangents à la surface $\mathscr{S}$ qui contiennent la droite $\mathscr{D}$.

Exercice 5.4. *Pour chacune des surfaces suivantes, déterminer une équation cartésienne du plan tangent au point donné, puis étudier la position de la surface par rapport à ce plan.*

1. $(S) : z = x^2 - y^2$ *en* $O(0,0,0)$ *;*
2. $(S) : z = x\left((\ln(x))^2 + y^2\right)$ *en* $A(1,0,0)$;
3. $(S) : z = x\left((\ln(x))^2 + y^2\right)$ *en* $B\left(\mathrm{e}^{-1}, 1, 2\mathrm{e}^{-1}\right)$