Interrogation 4 - CORRECTION

Exercice 0.1. *Réduire le plus possible :*

$A = 3cos(18\pi - x) - 4sin(x + \frac{\pi}{2}) + cos(x - \pi)$
$= 3cos(-x) - 4cos(x) - cos(x)$ *par périodicité.*
$= 3cos(x) - 4cos(x) - cos(x)$ *par parité.*
$= -2cos(x)$

Exercice 0.2. *Calculer* $sin(\frac{5\pi}{12})$ *en remarquant que* $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$.

$sin(\frac{5\pi}{12}) = sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})$
$= sin(\frac{\pi}{6})cos(\frac{\pi}{4}) + cos(\frac{\pi}{6})sin(\frac{\pi}{4})$
$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$
$= \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$

Exercice 0.3. *Résoudre l'équation* $sin(3x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ *sur* $[0; 2\pi]$.

$sin(3x) = \frac{-\sqrt{3}}{2} = sin(-\frac{\pi}{3})$
$\Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $3x = \pi - (-\frac{\pi}{3}) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

On obtient : $\mathscr{S} = \left\{\frac{4\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; \frac{10\pi}{9}; \frac{11\pi}{9}; \frac{16\pi}{9}; \frac{17\pi}{9}\right\}$

Exercice 0.4. *Soit un nombre* $q \in \mathbb{R} - \{1\}$*, démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Soit $\mathscr{P}_n$: "$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$" *pour* $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : *si* $n = 0$ *alors :*

- $1 + q + q^2 + ... + q^n = 1$
- $\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1$

Donc $\mathscr{P}_0$ *est vraie.*
Hérédité : *Supposons que* $\mathscr{P}_n$ *est vraie à un certain rang* $n \in \mathbb{N}$*, montrons que* $\mathscr{P}_{n+1}$ *est vraie.*
On sait que $1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ *donc :*

$1 + q + q^2 + ... + q^n + q^{n+1}$
$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ *est vraie.*
Conclusion : $\mathscr{P}_0$ *est vraie et* $\mathscr{P}_n$ *est héréditaire donc, par principe de récurrence,* $\mathscr{P}_n$ *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$.