Exercices
Chap.1 : Géométrie élémentaire du plan

1 Repérage dans le plan

Exercice 1.1. *Soit un triangle non aplati ABC et I le milieu du segment $[AB]$.*
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que la famille $\left\{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB},\overrightarrow{AC}\right\}$ est liée.

Exercice 1.2. *Le plan est muni d'une base $\mathscr{B}=\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\}$ de vecteurs du plan. Soient $\overrightarrow{w_1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$, $\overrightarrow{w_2}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et $\overrightarrow{w_3}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ trois vecteurs du plan.*
1. Déterminer les coordonnées dans $\mathscr{B}$ du vecteur $\overrightarrow{w}=-3\overrightarrow{w_1}+2\overrightarrow{w_2}-5\overrightarrow{w_3}$.
2. Déterminer un couple de réels $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{u}=\alpha\overrightarrow{w_1}+\beta\overrightarrow{w_2}$.
3. On admettra que $\overrightarrow{v}=-3\overrightarrow{w_1}-2\overrightarrow{w_2}$.
a) Vérifier que $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ forment une base $\mathscr{B}'$ de vecteurs du plan.
b) Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{w_3}$ dans $\mathscr{B}'$?

Exercice 1.3. *Le plan est rapporté à un repère $\mathscr{R}=(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ de vecteurs du plan dont on note $\mathscr{B}=\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right\}$ la base orthonormée de vecteurs associés.*
1. a) Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ forment une base de vecteurs du plan notée $\mathscr{B}'$.
b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ dans la base $\mathscr{B}'$.
2. Soit $A(3;2)$ dans le repère $\mathscr{R}$. Quelles sont les coordonnées du point A dans le repère $\mathscr{R}'=(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$?
3. Quelles sont les coordonnées du point A dans le repère $\mathscr{R}''=(\Omega;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, où $\Omega(2;-3)_{\mathscr{R}'}$?

Exercice 1.4. *Le plan est rapporté à un repère $\mathscr{R}=(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. On donne les points suivants définis par leurs coordonnées polaires :*

$$A\left[1,\tfrac{\pi}{4}\right],\ B\left[\sqrt{2},\tfrac{5\pi}{4}\right]\text{ et }C\left[2,\tfrac{\pi}{4}\right]$$

1. a) Représenter ces points et donner leurs coordonnées cartésiennes.
(b) Justifier que ces points sont alignés sur une droite passant par O.
2. Donner les coordonnées polaires de A, B, C et O dans le repère $\mathscr{R}'=(A;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$

Exercice 1.5. *Le plan est rapporté à un repère* $\mathscr{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*. On donne le point* A *de coordonnées polaires* $[4; \frac{\pi}{3}]$ *et* M *tel que l'angle* $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \frac{-\pi}{2}$ *et* $OA = OM$ *et le point* B *tel que* $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AM}$*.*
Déterminer les coordonnées polaires de B *et les coordonnées cartésiennes de* M*.*

2 Produit scalaire de deux vecteurs

Exercice 2.1. $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont deux vecteurs du plan avec* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \alpha$ *avec* $\alpha \in [0; \pi]$.
Calculer α *ou* $\|v\|$ *selon les cas :*
1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 2$*,* $\|\overrightarrow{u}\| = 1$ *et* $\alpha = \frac{-\pi}{4}$ *;*
2. $\|\overrightarrow{u}\| = 2$*,* $\|\overrightarrow{v}\| = 8$ *et* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 8\sqrt{2}$ *;*
3.$\|\overrightarrow{u}\| = 2\sqrt{3}$*,* $\|\overrightarrow{v}\| = 6$ *et* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -18$.

Exercice 2.2. *Dans le plan rapporté à un repère orthonormal* $\mathscr{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*, on donne les points* $A(-4; 1)$*,* $B(-1; 2)$ *et* $C(1; -4)$*.*
1. Montrer de deux manières différentes que le triangle ABC *est rectangle.*
2. Déterminer les coordonnées du point D *tel que le quadrilatère* $ABCD$ *soit un parallélogramme.*
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

Exercice 2.3. *Le plan est rapporté à un repère orthonormal* $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *de vecteurs du plan dont on note* $\mathscr{B} = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}\right\}$ *la base orthonormée de vecteurs associés.*
1. Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont orthogonaux deux à deux ?
$\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$, $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ *et* $\overrightarrow{w} \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$
2. Pour quelles valeurs du réel x *les vecteurs* $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x-2 \\ 2x-1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ *et* $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} x+4 \\ x-2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ *sont-ils orthogonaux ?*

Exercice 2.4. *Le plan est muni d'un repère orthonormé direct* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *et on considère les points*A, B, C, D, E, F, G *et* H *situés les cercles de centre* O *de rayon 2 et 3 comme représentés ci-dessous :*

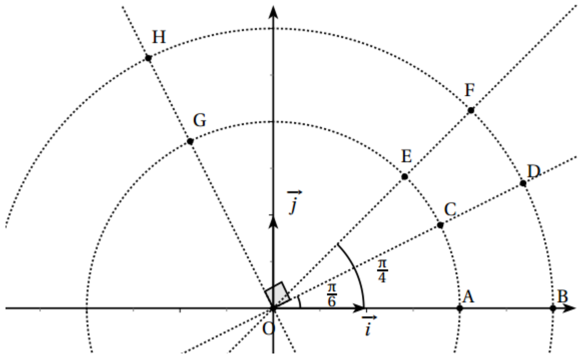

Figure 1

1. Déterminer les coordonnées des points figurants sur cette figure.
2. Déterminer la valeur des produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ *c)* $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$

b) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OE}$ *d)* $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OG}$

Exercice 2.5. *Soient* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{u}$ *deux vecteurs orthogonaux tels que* $\|\overrightarrow{u}\| = 3$ *et* $\|\overrightarrow{u}\| = 4$. *Calculer :*

1. $(\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}) \cdot (-2\overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v})$ *3.* $(3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}) \cdot (3\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v})$

2. $(2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}) \cdot (2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v})$

Exercice 2.6. *Pour tous vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *du plan, établir l'égalité :*

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 4\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$

Exercice 2.7. *Soient* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs du plan tels que* $\|\overrightarrow{u}\| = 4$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$ *et* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{3}$.
Calculer $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|$ *et* $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$.

3 Déterminant et colinéarité

Exercice 3.1. *Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct* $\mathscr{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, *on se donne les points* $A(1;2)$, $B(2;3)$ *et* $C(3;0)$. *A l'aide du déterminant, calculer l'aire du triangle* ABC.

Exercice 3.2. *Le plan muni d'un repère orthonormé direct* $\mathscr{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soient $a \in \mathbb{R}$ *quelconque,* $A(-3;1)$, $B(1;-1)$ *et* $C(a^2, 3a+1)$.
Déterminer les valeurs de a pour lesquelles les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires. Que peut-on en conclure pour les points* A, B *et* C *pour ces valeurs ?*

Exercice 3.3. *Le plan muni d'un repère orthonormé direct* $\mathscr{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*.Soient les points* $A(1;2), B(2;3)$ *et* $C(3;0)$*. Calculer l'aire du triangle* ABC *et la distance de chaque sommet au côté opposé.*

Exercice 3.4. *Le plan muni d'un repère orthonormé direct. On donne* $A(-1;2), B(2;1), C(3;-6)$ *et* $D(-6;-3)$*.*

1. *Montrer que* $ABCD$ *est un trapèze.*
2. *Calculer l'aire de* $ABCD$*.*
3. *Montrer que ses diagonales se coupent perpendiculairement. Quel est leur point d'intersection ?*

Exercice 3.5. *Le plan muni d'un repère orthonormé direct* $\mathscr{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*.*
Soient $A(-3;1), B(1;-1)$ *et* $C(3;3)$*. On note* I *le milieu de* $[AC]$*.*
1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$*,* $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$*.*
2. Soit $E(a;2)$ *où* $a \in \mathbb{R}$*. Déterminer* a *tel que* A, B *et* E *soient alignés.*
3. Quelle est la nature du triangle ABC *?*
4. Déterminer les coordonnées du point F *appartenant à l'axe des abscisses tel que* A, B *et* F *soient alignés.*