Exercices Chap.27 : Généralités sur les suites réelles

1 Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 1.1. *(u_n) désigne une suite arithmétique de raison r, de premier terme u_0 et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.*

1. *On donne $u_0 = -2$ et $r = \frac{1}{3}$. Calculer u_{10} et S_{10}.*
2. *On donne $u_2 = 3$ et $r = -2$. Calculer u_0 et S_2.*
3. *On donne $u_2 = 3$ et $u_5 = 12$. Calculer u_0 et r.*

Exercice 1.2. *(u_n) désigne une suite géométrique de raison q, de premier terme u_0 et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.*

1. *On donne $u_0 = -3$ et $q = \frac{1}{4}$. Calculer u_9 et S_9.*
2. *On donne $u_2 = 3$ et $q = 5$. Calculer u_0.*
3. *On donne $u_0 = 5$ et $u_1 = 12$. Calculer q et S_6.*

Exercice 1.3. *Soit (a_n) la suite définie par* $\begin{cases} a_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n - 3 \end{cases}$

1. *La suite (a_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?*
2. *Soit la suite (b_n) de terme général $b_n = a_n - 3$. Démontrer que (b_n) est géométrique. En déduire b_n puis a_n en fonction de n.*

Exercice 1.4. *La suite (u_n) est définie par récurrence par :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1} \end{cases}$.
La suite (v_n) a pour terme général $v_n = \frac{1}{u_n}$.

1. *Démontrer que (v_n) est arithmétique.*
2. *En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.*

2 Raisonnement par récurrence

Exercice 2.1. *On considère la fonction f :* $\begin{cases} \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2}{3-x} \end{cases}$ *et la suite (u_n) définie par récurrence par :* $\begin{cases} u_0 = 1,8 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. *Démontrer que f est croissante sur $[0;3[$.*
2. *Démontrer que la suite (u_n) est minorée par 1 et majorée par 2.*
3. *Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.*

Exercice 2.2. *La suite (u_n) est définie par récurrence par :*

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n) \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n-1}(1 - 3n)$$