Chap.10 : Fonctions trigonométriques directes et réciproques

1 Fonctions trigonométriques directes

1.1 Les fonctions cosinus et sinus

Proposition 1.1. *La fonction **cosinus** est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *avec :*

$$cos'(x) = -sin(x)$$

Elle est bornée sur $\mathbb{R}$ *:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq cos(x) \leq 1$$

Elle est paire et $2\pi-$ *périodique :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, cos(-x) = cos(x) \text{ et } cos(x + 2\pi) = cos(x)$$

Elle est strictement décroissante sur $[0; \pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$-\sin(x)$	0	$-$	0
$\cos$	*1* ↘	*0* ↘	*-1*

Proposition 1.2. *La fonction **sinus** est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *avec :*

$$sin'(x) = cos(x)$$

Elle est bornée sur $\mathbb{R}$ *:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq sin(x) \leq 1$$

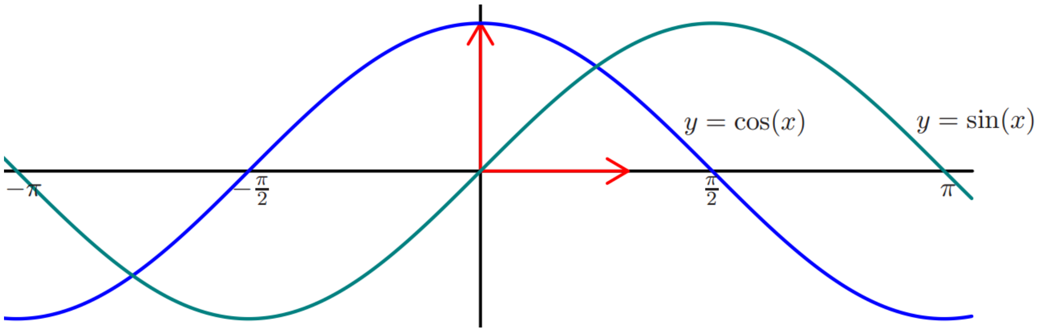
Elle est impaire et $2\pi-$ *périodique :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, sin(-x) = -sin(x) \text{ et } sin(x + 2\pi) = sin(x)$$

Elle est strictement croissante sur $\left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$	1	$+$	0	$-$	-1
sin	*0*	$\nearrow$	*1*	$\searrow$	*0*

Les courbes représentatives sont les suivantes :



1.2 La fonction tangente

Définition 1.3. *On appelle **fonction tangente** la fonction définie sur $\mathscr{D}_{tan} = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par :*

$$tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$

Proposition 1.4.
- *La fonction tangente est impaire et $\pi-$ périodique :*

$$\forall x \in \mathscr{D}_{tan}, tan(-x) = -tan(x) \text{ et } tan(x+\pi) = tan(x)$$

- $\forall x \in \mathscr{D}_{tan}, tan(\pi - x) = -tan(x)$
- *si $x \in \mathscr{D}_{tan}$ et si $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ alors : $tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{tan(x)}$*

Preuve :

Application 1.5. *Sous réserve d'existence, établir les égalités suivantes :*

1. $\frac{1-cos(x)}{sin(x)} = tan(\frac{x}{2})$
2. $tan(\frac{\pi}{4}+x)+tan(\frac{\pi}{4}-x) = \frac{2}{cos(2x)}$
3. $\frac{1}{tan(x)} - tan(x) = \frac{2}{tan(2x)}$

Proposition 1.6. *La fonction tan est dérivable en tout point de $\mathscr{D}_{tan}$ avec :*

$$tan'(x) = 1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$$

Preuve :

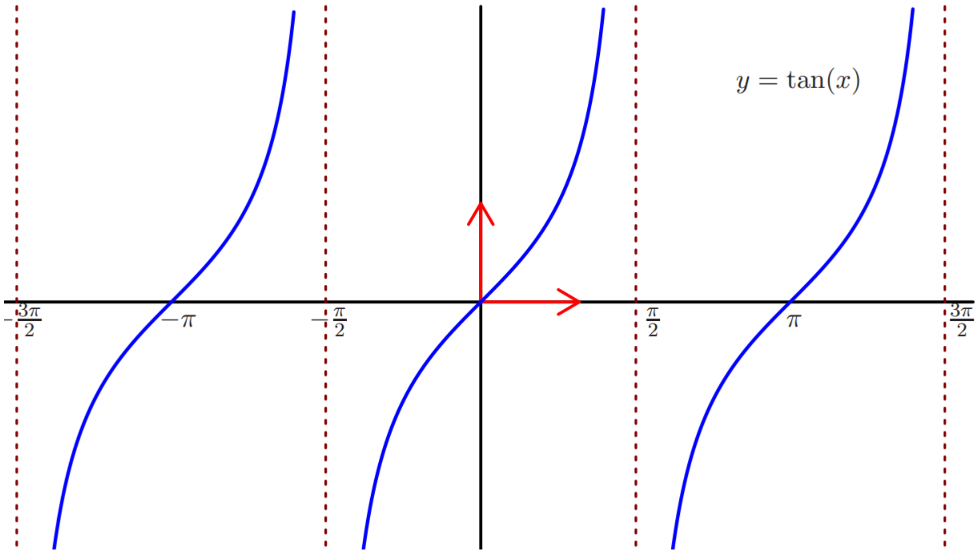
Proposition 1.7. *La fonction tangente étant impaire et $\pi-$ périodique, il suffit de l'étudier sur $[0; \frac{\pi}{2}[$. Voici son tableau de variation sur cet intervalle :*

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$tan'(x)$	1	$+$	$\Vert$
tan	0	$\nearrow$	$+\infty$

Proposition 1.8. *Courbe représentative*
Sur l'intervalle $]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, la courbe représentative de tan :

1. *Admet en 0 une tangente de coefficient directeur 1 ;*
2. *Admet les droites d'équations $x = \frac{-\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$ pour asymptotes verticales ;*
3. *Admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente au point d'abscisse 0.*

Preuve :



Proposition 1.9. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ alors :*

$$tan(a) = tan(b) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, a = b + k\pi$$

Application 1.10. *Résoudre l'équation $tan(2x) = tan(4x)$ sur $[-\pi; \pi]$.*

2 Fonctions trigonométriques réciproques

2.1 Fonction arccosinus

Définition 2.1. *La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0; \pi]$, à valeurs dans $[-1; 1]$. D'après le corollaire du théorème* *des valeurs intermédiaires, pour tout $x \in [-1;1]$, il existe une unique valeur $y \in [0;\pi]$ telle que $x = cos(y)$. On note $y = arccos(x)$.*

*On appelle fonction **arccosinus**, notée arccos, la fonction réciproque de la fonction cosinus restreinte à l'intervalle $[0;\pi]$:*

$$\begin{tikzcd} {[0;\pi]} \arrow[r, bend left, "cos"] & {[-1;1]} \arrow[l, bend left, "arccos"] \end{tikzcd}$$

Proposition 2.2. *Il découle de la définition que :*

- $\forall \theta \in [0;\pi]\,, arccos(cos(\theta)) = \theta$
- $\forall x \in [-1;1]\,, cos(arccos(x)) = x$

Application 2.3. *Compléter :*

1. $arccos(-1) =$
2. $arccos(\frac{1}{2}) =$
3. $arccos(0) =$
4. $arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) =$
5. $arccos(\frac{-1}{2}) =$
6. $arccos(cos(\frac{5\pi}{4})) =$
7. $arccos(cos(\frac{8\pi}{3})) =$
8. $arccos(cos(\frac{-7\pi}{4})) =$
9. $arccos(cos(\frac{-13\pi}{6})) =$

Application 2.4. 1. *Pour tout $x \in [-1;1]$, comparer $cos(arcos(-x))$ avec $cos(\pi - arccos(x))$. Qu'en conclure ?*

2. *Simplifier $cos(2arccos(x))$ pour $x \in [-1;1]$.*

Proposition 2.5. • *La fonction arccos est définie et continue sur $[-1;1]$.*

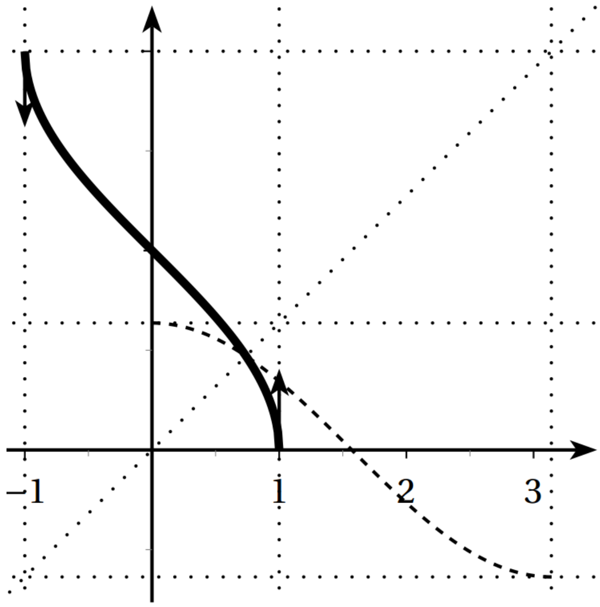
- *La fonction arccos est dérivable sur $]-1;1[$ avec :*

$$\forall x \in \,]-1;1[\,, arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- *La tableau de variation de arccos est :*

x	-1	0	1
$arccos'(x)$	$\|$	$-$	$\|$
$arccos$	π	$\frac{\pi}{2}$	0

- *La courbe représentative de arccos s'obtient par symétrie de la courbe de cos par rapport à la première bissectrice :*



Application 2.6. *1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1-x^2}{1+x^2} \in]-1;1]$.*

2. Préciser le domaine de dérivabilité de f puis calculer la dérivée de la fonction f définie par :

$$f(x) = arccos(\frac{1-x^2}{1+x^2})$$

2.2 Fonction arcsinus

Définition 2.7. *La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, à valeurs dans $[-1;1]$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $x \in [-1;1]$, il existe une unique valeur $y \in \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ telle que $x = sin(y)$. On note $y = arcsin(x)$.*

*On appelle fonction **arcsinus**, notée arcsin, la fonction réciproque de la fonction sinus restreinte à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$:*

$$\begin{tikzcd} \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \arrow[r, bend left, "sin"] & {[-1;1]} \arrow[l, bend left, "arcsin"] \end{tikzcd}$$

Proposition 2.8. *Il découle de la définition de arcsin que :*

- $\forall \theta \in \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], arcsin(sin(\theta)) = \theta$
- $\forall x \in [-1;1], sin(arcsin(x)) = x$

Proposition 2.9. *La fonction arcsin est **impaire** :*

$$\forall x \in [-1;1], sin(arcsin(-x)) = -x$$

Application 2.10. *Compléter :*

1. $arcsin(-1) =$
2. $arcsin(\frac{1}{2}) =$
3. $arcsin(0) =$
4. $arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) =$
5. $arcsin(\frac{-1}{2}) =$
6. $arcsin(sin(\frac{5\pi}{4})) =$
7. $arcsin(sin(\frac{8\pi}{3})) =$
8. $arcsin(sin(\frac{-7\pi}{4})) =$
9. $arcsin(sin(\frac{-13\pi}{6})) =$

Application 2.11. *Simplifier $cos(2arcsin(x))$ pour $x \in [-1;1]$.*

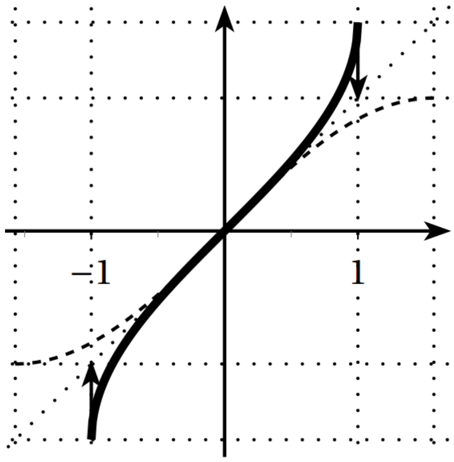
Proposition 2.12.
- *La fonction arcsin est définie et continue sur $[-1;1]$.*
- *La fonction arcsin est dérivable sur $]-1;1[$ avec :*

$$\forall x \in]-1;1[, arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- *La tableau de variation de arcsin est :*

x	-1		0		1
$arcsin'(x)$	‖		$+$		‖
$arcsin$	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

- *La courbe représentative de arcsin s'obtient par symétrie de la courbe de sin par rapport à la première bissectrice :*



Application 2.13. *1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1;1]$.*

2. Préciser le domaine de dérivabilité de f puis calculer la dérivée de la fonction f définie par :

$$f(x) = arcsin(\tfrac{2x}{1+x^2})$$

2.3 Fonction arctangente

Définition 2.14. *La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une unique valeur $y \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$*

telle que $x = tan(y)$. On note $y = arctan(x)$.

*On appelle fonction **arctangente**, notée arctan, la fonction réciproque de la fonction tangente restreinte à l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:*

$$\begin{tikzcd} \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\arrow[r, bend left, "tan"] & \mathbb{R} \arrow[l, bend left, "arctan"] \end{tikzcd}$$

Proposition 2.15. *Il découle de la définition de arctan que :*

- $\forall \theta \in \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, arctan(tan(\theta)) = \theta$
- $\forall x \in \mathbb{R}, tan(arctan(x)) = x$

Proposition 2.16. *La fonction arctan est **impaire** :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, tan(arctan(-x)) = -x$$

Application 2.17. *Compléter :*

1. $arctan(-\sqrt{3}) =$
2. $arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) =$
3. $arctan(0) =$
4. $arctan(tan(\frac{5\pi}{4})) =$
5. $arctan(tan(\frac{7\pi}{4})) =$

Proposition 2.18.

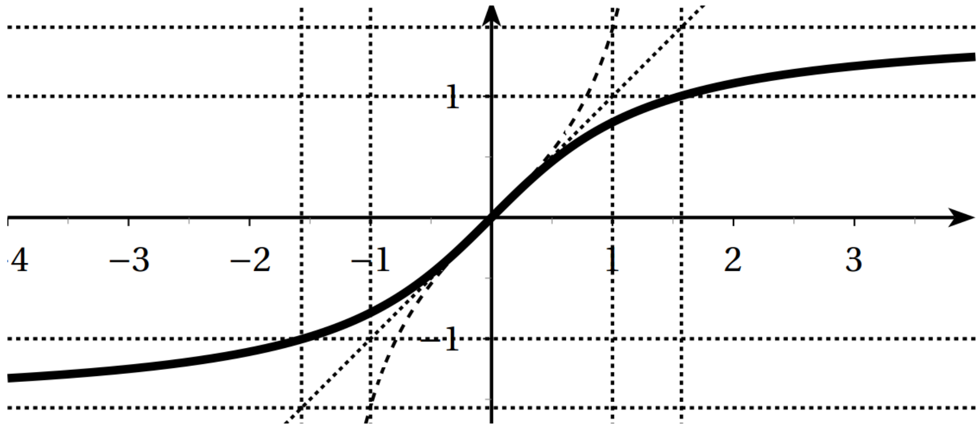
- *La fonction arctan est définie et continue sur $\mathbb{R}$.*
- *La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
- *La tableau de variation de arctan est :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$arctan'(x)$	$\|$		$+$		$\|$
$arctan$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

- *La courbe représentative de arctan s'obtient par symétrie de la courbe de tan par rapport à la première bissectrice :*



Application 2.19. *Soit la fonction* $f : x \mapsto arcsin(\frac{2x}{1+x^2}) - 2arctan(x)$.

1. *Déterminer le domaine de définition de la fonction* f.
2. *Étudier la parité de* f.
3. *Calculer* $f(0), f(1), f(\sqrt{3})$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Application 2.20. *Soit la fonction* $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) = arctan(x) + arctan(\tfrac{1}{x})$$

1. *Calculer* $f'(x)$ *pur tout* $x \in \mathbb{R}^*$.
2. *En déduire alors que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, arctan(x) + arctan(\frac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & si\ x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & si\ x < 0 \end{cases}$$