Devoir-Maison 3

A rendre le mardi 5 novembre 2024

Dans tout ce problème, on considère un réel a strictement positif.

Partie 1 Préliminaires

1. Justifier que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{a^2+k^2}$ converge.
2. Dans cette question, α est un réel strictement positif et β un réel quelconque.
   (a) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue. Rappeler la définition de f intégrable sur $[0,+\infty[$.
   (b) Justifier que les intégrales $\int_0^{+\infty} \cos(\beta t)e^{-\alpha t}dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(\beta t)e^{-\alpha t}dt$ convergent.
   (c) Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-\alpha+i\beta)t}dt$ converge et calculer cette intégrale.
   (d) En déduire :
   $$\int_0^{+\infty} \cos(\beta t)e^{-\alpha t}dt = \frac{-\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(\beta t)e^{-\alpha t}dt = \frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Partie 2 Une expression intégrale

1. (a) Donner un équivalent au voisinage de 0 de $x \mapsto \frac{\sin(ax)}{e^x-1}$.
   (b) Prouver la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x-1}dx$.
2. Justifier que l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(ax)e^{-kx}dx$ est convergente pour tout entier naturel k non nul et donner une expression de la valeur de l'intégrale I_k.
3. Pour tout entier naturel n non nul, on note
   $$R_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x-1}dx - \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{a^2+k^2}.$$
   Montrer que $R_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x-1}e^{-nx}dx$.
4. (a) Montrer que, pour tout $x \in [\ln(2),+\infty[$, on a $0 \leqslant \frac{1}{e^x-1} \leqslant 1$.
   (b) Justifier qu'il existe un réel K positif tel que, pour tout $x \in]0,\ln 2]$, $\left|\frac{\sin(ax)}{e^x-1}\right| \leqslant K$.

(c) En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{\sin(ax)}{e^x-1}$ est bornée sur $]0,+\infty[$.

5. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2+k^2}.$$