Exercices
Chap.13 : Dérivation et applications

1 Interprétation graphique du nombre dérivée

Exercice 1.1. *Soit f une fonction définie sur $[-4;4]$ dont le tableau de variation est le suivant :*

x	-4		-2		$\frac{-1}{2}$		4
f	2	$\searrow$	$\frac{-3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	-3

On a de plus : $f(-3) = f(-1) = f(0) = 0$ et $f(2) = \frac{-5}{2}$.

1. *Placer tous les points de $\mathscr{C}_f$ dont on connait les coordonnées dans un repère orthonormé.*
2. *On donne $f'(-3) = \frac{-3}{2}$,$f'(-2) = 0$,$f'(0) = -4$ et $f'(2) = \frac{-1}{2}$. Placer les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisse $-3, -2, \frac{-1}{2}, 0$ et 2.*
3. *Donner une esquisse de $\mathscr{C}_f$.*

2 Étude de fonction

Exercice 2.1. *On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par*

$$f(x) = \frac{ln(x)}{x}$$

1. *Calculer $f(e), f(\frac{1}{e}), f(\sqrt{e})$ et $f(e^2)$.*
2. *Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.*
3. *Calculer la dérivée de la fonction f, puis construire le tableau de variation de f.*
4. *Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.*
5. *Construire $\mathscr{C}_f$.*

Exercice 2.2. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

1. *Étudier la parité de la fonction f.*
2. *Étudier la limite de f en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.*
3. *Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+$.*
4. *Déterminer l'équation réduite de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.*
5. *Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T_0.*
6. *Construire $\mathscr{C}_f$, ses asymptotes et ses tangentes connues.*
7. *Démontrer que les tangentes $\mathscr{C}_f$ en deux points d'abscisses opposées sont parallèles.*

Exercice 2.3. *Étudier la fonction $f : x \mapsto cos^3(x) + sin^3(x)$.*

Exercice 2.4. *Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par*

$$f(x) = (x - e)(ln(x) - 1)$$

1. *Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.*
2. *Déterminer la fonction dérivée de f.*
3. *Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = ln(x) - \frac{e}{x}$*
   (a) *Déterminer le sens de variation de g.*
   (b) *Calculer $g(e)$ et en déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$.*
4. *Dresser le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.*
5. *Construire $\mathscr{C}_f$, ses asymptotes et ses tangentes horizontales éventuelles.*

Exercice 2.5. 1. *Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par*

$$g(x) = x - ln(x)$$

   (a) *Etudier les variations de g.*
   (b) *En déduire que : $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) \geq 1$.*

2. *On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par*

$$f(x) = \frac{ln(x)}{x - ln(x)}$$

   (a) *Justifier que $\mathscr{D}_f =]0;+\infty[$*
   (b) *Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.*
   (c) *Étudier le sens de variation de f et construire son tableau de variation.*
   (d) *Soit $A(0;-1)$. Pour tout $x > 0$, on considère le point $M(x; f(x))$. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AM) en fonction de x, puis sa limite lorsque x tend vers 0.*
   Interpréter graphiquement le résultat.
   (e) *Construire $\mathscr{C}_f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.*

3 Bijection et fonction réciproque

Exercice 3.1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.*

1. *Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à expliciter.*
2. *Pour $x \in]-1;1[$, on pose $g(x) = \frac{1}{2}ln(\frac{1+x}{1-x})$.*
   Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 3.2. *Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty;-1[$ par*

$$f(x) = ln(x^2 - 2x - 3)$$

1. *Étudier les variations de f.*
2. *Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.*
3. *Calculer alors $f^{-1}(ln(5))$ et $(f^{-1})'(ln(5))$.*

Exercice 3.3. *Soit f la fonction définie sur $I = \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ par*

$$f(x) = -3sin^2(x) + 5$$

1. *Montrer que f admet une fonction réciproque g dont on déterminera les domaines de définition et de dérivabilité.*
2. *Calculer $g'(\frac{11}{4})$*