Exercices
Chap.17 : Équations dans $\mathbb{C}$ et transformations affines

1 Équations de degré 2 dans $\mathbb{C}$

Exercice 1.1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :*

1. $z^2 - 5z + 7 - i = 0$
2. $iz^2 + (i+3)z + 2 - 2i = 0$
3. $z^2 - 3iz + 6 = 0$
4. $z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i = 0$

Exercice 1.2. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :*

1. $z^2(1-z^2) = 16$
2. $z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = 0$
   *(**Indication** : une des solutions est un imaginaire pur)*

2 Racines $n^{\text{ième}}$

Exercice 2.1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :*

1. $z^6 = 1$
2. $z^3 = 8i$
3. $z^4 = -3 - 3i$
4. $3z^3 = \sqrt{3}i - 1$

Exercice 2.2. *Soient z_1, z_2 et z_3 trois nombres complexes distincts ayant le même cube.*

1. *Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1.*
2. *Donner, sous forme trigonométrique, les solutions dans $\mathbb{C}$ de : $z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0$.*
   ***Indication** : poser $Z = z^3$; calculer $(9+i)^2$*

   2.

Exercice 2.3. *On se propose dans cet exercice de calculer la valeur de la somme :*

$$S = \frac{1}{2} + cos(\frac{2\pi}{7}) + cos(\frac{4\pi}{7}) + cos(\frac{6\pi}{7})$$

Pour $k \in [\![0,6]\!]$, on note $z_k = e^{\frac{2k\pi i}{7}}$.

1. (a) *Vérifier que pour tout $k \in [\![0,6]\!], (z_k)^7 = 1$.*

(b) *En déduire la valeur de la somme* $S_1 = \sum\limits_{k=0}^{6} z_k$.

(c) *Donner la forme algébrique des complexes* z_k *pour tout* $k \in [\![0, 6]\!]$.

(d) *Justifier que :* $z_6 = \overline{z_1}$, $z_5 = \overline{z_2}$ *et* $z_4 = \overline{z_3}$

2. *Montrer que* $S_1 = 1 + \sum\limits_{k=1}^{3} 2Re(z_k)$.

3. *Pour* $k \in \{1, 2, 3\}$, *exprimer* z_k *en fonction de* $cos(\frac{2\pi}{7}), cos(\frac{4\pi}{7}), cos(\frac{6\pi}{7})$, $sin(\frac{2\pi}{7}), sin(\frac{4\pi}{7})$ *et* $sin(\frac{6\pi}{7})$. *Donner également* $Re(z_k)$.

4. *Que vaut alors* S *? Justifier.*