

Programme de Khôlle 7

Semaine du 16 novembre 2020

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire(5-10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

1. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes (les domaines de définition (\mathcal{D}_f) et de dérivabilité (Δ_f) seront à préciser et à justifier :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f_1(x) = \arccos(8 - 2x^2) & \text{(d)} f_4(x) = \sqrt{2x^2 - 5x - 3} \\ \text{(b)} f_2(x) = \arcsin(9 + x^2) & \\ \text{(c)} f_3(x) = \arccos(9 - 3x^2) & \text{(e)} f_5(x) = \ln\left(\frac{2-3x}{5+3x}\right) \end{array}$$

2. Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur les intervalles donnés :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f_1(x) = \frac{4}{6+2x} + 5x^3 \text{ sur } I =]-\infty; -3[& \\ \text{(b)} f_2(x) = \frac{3x}{x^2+4} + \cos(5x) \text{ sur } I = \mathbb{R} & \\ \text{(c)} f_3(x) = \frac{3}{x^2+1} - 4\sin(3x) \text{ sur } I = \mathbb{R} & \\ \text{(d)} f_4(x) = \frac{5x}{6+2x^2} + \frac{\sin(x)}{4+\cos(x)} \text{ sur } I = \mathbb{R} & \\ \text{(e)} f_5(x) = \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2x}{1-x^2} \text{ sur } I =]-1; -1[& \end{array}$$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. Soit la fonction définie sur $] -\infty; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{5x^2 - x}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1}$.
2. En déduire les primitives de f sur $] -\infty; 1[$.
3. Déterminer la primitive de f sur $] -\infty; 1[$ qui s'annule en -1 .

Exercice 2.2. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2\ln(x) + 3$$

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b , que l'on déterminera, tels que la fonction F , définie sur $]0; +\infty[$, par $F(x) = x(a\ln(x) + b)$ soit une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer toutes les primitives de f sur $]0; +\infty[$.
3. Déterminer la primitive de f sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en e .

Exercice 2.3. 1. Exprimer en fonction de n les sommes :

$$(a) S_2 = \sum_{k=0}^n (4k - 3^k)$$

$$(b) S_3 = \sum_{k=1}^n (2k - 3)$$

2. (a) Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2}$.

$$(b) \text{ Calculer } \sum_{k=1}^{70} \frac{3}{k(k+2)}.$$

Indication : on pourra effectuer un changement d'indice.

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.11 : Calcul de dérivées et de primitives

1. Calculer une dérivée

2. Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

- 2.1 Famille des primitives d'une fonction
- 2.2 Problème de l'unicité

3. Recherche de primitives

- 3.1 En utilisant le tableau des dérivées usuelles
- 2.2 En utilisant le tableau des fonctions dérivées

Chap.12 : Calcul de sommes et de produits

1. Sommes finies

- 1.1 La notation de sommation
- 1.2 Sommes à connaître : $\sum_{k=0}^n k$ et $\sum_{k=0}^n q^k$
- 1.3 Relation de Chasles pour une somme finie

- 1.4 Linéarité
- 1.5 Changement d'indice dans une somme
- 1.6 Sommes télescopiques
- 1.7 Factorisation de $a^n - b^n$