Intégration
Devoir-Maison 9

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 (1-t)^n e^{t/2}\ \mathrm{d}t$

1. Calculer I_0.
   $I_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{t/2}\ \mathrm{d}t = \left[e^{t/2}\right]_0^1 = e^{1/2}-1$, soit $I_0 = \sqrt{e}-1$

2. (a) Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto te^{t/2}$ en procédant par parties.
   On pose :
   $$\begin{array}{ll} u(t) = t, & u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{t/2}, & v(t) = 2e^{t/2} \end{array}$$
   u et v ainsi définies sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc on peut intégrer par parties :
   $$\int te^{t/2}\ \mathrm{d}t = 2te^{t/2} - 2\int e^{t/2}\ \mathrm{d}t = 2te^{t/2} - 4e^{t/2}$$
   Ainsi, une primitive de $t \mapsto te^{t/2}$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto 2(t-2)e^{t/2}$

   (b) En déduire la valeur de I_1.
   Par linéarité : $I_1 = \frac{1}{4}\int_0^1 (1-t)e^{t/2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}I_0 - \frac{1}{4}\int_0^1 te^{t/2}\ \mathrm{d}t$.
   Selon 1 et 2.a) :
   $$I_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{e}-1) - \frac{1}{4}\left[2(t-2)e^{t/2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\sqrt{e}-1) - \frac{1}{4}(-2\sqrt{e}+4).$$
   Donc $I_1 = \sqrt{e} - \frac{3}{2}$.

3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :
   $u(t) = (1-t)^{n+1}, \quad u'(t) = -(n+1)(1-t)^n$
   $v'(t) = e^{t/2}, \quad v(t) = 2e^{t/2}$
   u et v ainsi définies sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ donc on peut intégrer par parties :
   $$\int_0^1 (1-t)^{n+1}e^{t/2}\ \mathrm{d}t = \left[2(1-t)^{n+1}e^{t/2}\right]_0^1 + 2(n+1)\int_0^1 (1-t)^n e^{t/2}\ \mathrm{d}t$$
   Or, $\left[2(1-t)^n e^{t/2}\right]_0^1 = -2$, donc, en divisant par $2^{n+2}(n+1)!$, on a bien : $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k\frac{1}{2^k k!} = \sqrt{e} - I_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par sommation terme à terme les relations précédemment obtenues :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (I_{n+1} - I_n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}(k+1)!}$$

Par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (I_{n+1} - I_n) = I_n - I_0 = I_n - \sqrt{e} + 1.$$

En posant $h = k+1$: $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}(k+1)!} = \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{2^h h!}$.
Finalement, en notant que $1 = \frac{1}{2^0 0!}$, on déduit que :

$$\sum_{h=0}^{n} \frac{1}{2^h \times h!} = \sqrt{e} - I_n$$

4. (a) Montrer que, pour tout $t \in [0;1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant (1-t)^n e^{t/2} \leqslant 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\varphi(t) = (1-t)^n e^{t/2}$.
φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de fonctions dérivables, et :

$$\begin{aligned}\forall t \in [0;1], \quad \varphi'(t) &= -n(1-t)^{n-1}e^{t/2} + \frac{1}{2}(1-t)^n e^{t/2}\\ &= -\frac{(1-t)^{n-1}e^{t/2}}{2}(2n-(1-t))\\ &= -\frac{(1-t)^{n-1}e^{t/2}}{2}(t+2n-1)\end{aligned}$$

Comme $n \geqslant 1, 2n \geqslant 2$, donc $2n-1 \geqslant 1$.
Ainsi, pour tout $t \in [0;1], t+2n-1 \geqslant 0$, donc $\varphi'(t) \leqslant 0$.
Par conséquent, φ est décroissante sur $[0;1]$.
Or, $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1) = 0$, donc $\forall t \in [0;1], 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$ En d'autres termes :

$$\forall t \in [0;1], 0 \leqslant (1-t)^n e^{t/2} \leqslant 1$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^{n+1}n!}$.
Indication : On rappelle que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ avec $a < b$, et telles que

$$\forall t \in [a;b], f(t) \leqslant g(t), \text{ alors } \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Selon 4.a, la croissance de l'intégration permet d'écrire que : $0 \leqslant \int_0^1 (1-t)^n e^{t/2}\ \mathrm{d}t \leqslant 1$. Comme $\frac{1}{2^{n+1}n!} > 0$, on en tire : $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^{n+1}n!}$

(c) En déduire la limite de $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2^{n+1} n! \geqslant 2^{n+1}$. Or, $\lim 2^{n+1} = +\infty$, donc par minoration, $\lim 2^{n+1} n! = +\infty$
et par quotient :

$$\lim \frac{1}{2^{n+1} n!} = 0.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim I_n = 0$.
Selon 3.b :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} = \sqrt{e} - \lim I_n = \sqrt{e}$$