# Exercices
# Chap.9 : Séries entières

## 1 Rayon de convergence

**Exercice 1.1.** *Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :*

1. $\sum \mathrm{e}^{-n^2} z^n$
2. $\sum \frac{(-1)^n}{n^n} z^n$
3. $\sum 5^n z^{2n+1}$
4. $\sum \tan\left(\frac{n\pi}{3}\right) z^n$
5. $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) z^n$
6. $\sum \frac{n^{2n}}{(2n)!} z^n$
7. $\sum \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}}{1+\mathrm{i}n} z^n$
8. $\sum \sin\left(\frac{1}{3^n}\right) z^{3n}$
9. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n} z^n$
10. $\sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) z^n$

**Exercice 1.2.** *Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants :*

1. *$a_n$ est le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de $n$.*
2. *$a_n = n$ si $n$ est un multiple de 3 ou de 5 et $a_n = 0$ sinon.*
3. *$a_n = (2+(-1)^n)^n$.*

**Exercice 1.3.** *On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$.*
*On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \in \left]0;+\infty\right[$.*
*Quel est le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^{2n}$ ?*

**Exercice 1.4.** *On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1}$.*

1. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$.*
2. *Montrer qu'il y a convergence en tout point du cercle d'incertitude.*

## 2 Développement en série entière

**Exercice 2.1.** *Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière au voisinage de 0 . Déterminer leurs développements ainsi que les rayons de convergence correspondants :*

1. $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$
2. $g(x)=\cos^2(x)$
3. $h(x)=\frac{1}{(1+x)(1+2x)}$
4. $i(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$
5. $j(x)=\ln\left(x^2-5x+6\right)$
6. $k(x)=\mathrm{e}^x\cos(x)$
7. $\ell(x)=\arcsin(x)$
8. $m(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$
9. $n(x)=\int_0^x\varphi(t)dt$ *avec* $\varphi(t)=\begin{cases}\frac{\ln(1+t)}{t} & si\ t\neq 0\\ 1 & si\ t=0\end{cases}$

**Exercice 2.2.** *On considère la fonction $f$ définie sur $]-1;1[$ par :*

$$f(x)=(\arcsin(x))^2.$$

1. *Justifier que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-,1;1[$.*
2. *Montrer que $f$ est solution du problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases}\left(1-x^2\right)y''-xy'=2\\ y(0)=0\\ y'(0)=0\end{cases}$$

3. *Supposons que $f$ est développable en série entière et notons alors $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ sont développement en série entière valable sur $]-\alpha;\alpha[$ avec $\alpha>0$.*
   (a) *En utilisant l'équation différentielle $\left(1-x^2\right)y''-xy'=2$, montrer que :*
   $$\begin{cases}\forall n\geqslant 2, a_{n+2}=\frac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n\\ a_2=1\\ 6a_3-a_1=0\end{cases}$$
   (b) *Que valent $a_0$ et $a_1$ ?*
   (c) *En déduire que le développement en série entière éventuel de $f$ est $f(x)=\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\frac{2^{2p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!}x^{2p}$ et préciser le rayon de convergence de cette série entière.*
4. *Pour finir, expliquer pourquoi $f$ est bien développable en série entière.*

## 3 Somme d'une série entière

**Exercice 3.1.** 1. *Quel est le rayon de convergence de la série $\sum n^2z^n$ ?*

2. *Donner le rayon de convergence et la somme des séries suivantes : $\sum x^n$, $\sum\limits_{n\geq 1}nx^{n-1}$, $\sum\limits_{n\geq 2}n(n-1)x^{n-2}$*

3. *En déduire la valeur de* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^2x^n$ *sur son intervalle de convergence.*

**Exercice 3.2.** *On considère la série entière* $\sum\limits_{n\geq 2}(-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}$.

1. *Déterminer son rayon de convergence et son intervalle ouvert de convergence, noté*
2. *Déterminer son domaine réel de convergence, noté* $D$.
3. *Pour tout* $x \in D$, *on pose* $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}$.

   *Calculer* $f''(x)$ *pour tout* $x$ *dans un intervalle à préciser.*
4. *En déduire la valeur de* $f(x)$ *pour tout* $x$ *dans un intervalle à préciser.*

**Exercice 3.3.** *Calculer le rayon de convergence et la somme des séries suivantes :*

1. $\sum \left(n^2+n+1\right)x^n$
2. $\sum \frac{n+1}{n+2}x^n$
3. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}x^n$

**Exercice 3.4.** *On considère la fonction de la variable réelle* $x$, *définie par :*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}x^{2n}.$$

1. *Donner le rayon de convergence* $R$ *de la série.*
2. *A l'aide du développement en série entière de* $\arctan(x)$ *(cf. application du cours) calculer* $S(x)$ *pour* $x \in ]-R;R[$.

**Exercice 3.5.** *On note* $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$.

1. *Quelle remarque pouvez vous faire sur les valeurs de* $\mathrm{j}^2, 1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2$ *et* $\mathrm{j}^3$ *?*
2. *Quel est le rayon de convergence de la série* $\sum \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ *?*
   *On considère maintenant la fonction* $f$ *définie sur* $]-R;R[$ *par :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

3. *Après avoir remarqué que, pour tout réel* $x$ *:*

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}$$

*décomposer sur le même modèle* $e^{jx}$ *et* $e^{j^2x}$.
*Il sera astucieux d'écrire les trois décompositions les unes en dessous des autres.*

4. *En déduire que* $f(x) = \frac{e^x}{3} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-x/2}$.
5. *En vous inspirant des questions précédentes, calculer déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série* $\sum \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$.

**Exercice 3.6.** *On fixe* $p \in \mathbb{N}$.

1. *Quel est le rayon de convergence de la série entière* $\sum \begin{pmatrix} n+p \\ p \end{pmatrix} x^n$ *?*

   *On pose alors, pour tout* $x \in \,]-R;R[\,$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} n+p \\ p \end{pmatrix} x^n$.
2. *Montrer que* $f$ *est solution de l'équation différentielle :*
$$(1-x)y' - (p+1)y = 0.$$
3. *En déduire une expression de* $f(x)$ *pour* $x \in ]-R;R[$ *à l'aide des fonctions usuelles.*

## 4 Application aux équations différentielles

**Exercice 4.1.** *On considère l'équation différentielle* $y'' + xy' + y = 1$.
*On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant* $y(0) = y'(0) = 0$.

1. *Supposons qu'il existe une série entière* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *de rayon de convergence* $R > 0$ *solution de l'équation.*
   *Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *?*
2. *Calculer explicitement* $a_n$ *pour chaque* $n$.
   *Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?*
3. *Exprimer cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.*

**Exercice 4.2.** *Trouver toutes les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle :*
$$x^2y'' + x(x+1)y' - y = 0$$
*Exprimer cette solution à l'aide des fonctions usuelles.*

**Exercice 4.3.** *Déterminer une solution développable en série entière au voisinage de* $0$ *de l'équation différentielle :*
$$t^2y'' + 4ty + 2y = \ln(1+t)$$
*Exprimer cette solution à l'aide des fonctions usuelles.*