Exercices
Chap.7 : Probabilités sur un univers dénombrable

1 Manipulation d'événements

Exercice 1.1. *On considère des événements A, B, C d'un univers Ω.*
Écrire à l'aide des opérations d'ensembles les événements suivants :

1. *Les événements A et B sont réalisés mais pas C.*
2. *L'un au moins des événements A, B, C est réalisé.*
3. *Un et un seul des événements A, B, C est réalisé.*
4. *L'un au plus des événements A, B, C est réalisé.*

Exercice 1.2. *Soit A un événement et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'événements d'un univers Ω.*

1. *Montrer que :* $A \cup \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} (A \cup B_n)$
   et que : $A \cap \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \right) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A \cap B_n)$.
2. *Montrer que :* $\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{B_n}$
   et que : $\overline{\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{B_n}$

2 Univers fini et événements élémentaires équiprobables

Exercice 2.1. *On compose un numéro de téléphone à 10 chiffres.*

1. *Quelle est la probabilité que tous les chiffres soient distincts ?*
2. *Quelle est la probabilité qu'il commence par 01 ?*
3. *Quelle est la probabilité que ses chiffres forment une suite strictement croissante ?*

Exercice 2.2. *On tire 8 cartes simultanément et au hasard dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité pour que figurent (exactement) :*

1. *2 as parmi ces 8 cartes ?*
2. *3 piques ?*
3. *2 as et 3 piques ?*
4. *2 as ou 3 piques ?*

3 Probabilité sur un univers dénombrable

Exercice 3.1. *On fixe $c \in]0;1[$ et on pose :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(\{k\}) = K_c \frac{c^k}{k!}$$

où K_c est un réel que l'on va déterminer.

1. *Quelle doit être la valeur de K_c pour que $(\mathbb{N}, P)$ soit un espace probabilisé ? (c'est-à-dire pour que P soit une probabilité sur $\mathbb{N}$)*
2. *Calculer alors la probabilité de l'ensemble des entiers naturels impairs.*

Exercice 3.2. *On pose* : $\forall n \in \mathbb{N}, P(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

1. *Montrer que $(\mathbb{N}, P)$ est un espace probabilisé.*
2. *On considère les événements B : "obtenir un entier supérieur ou égal à 10" et I :" obtenir un entier impair".*
   Calculer $P(I)$ et $P(B)$.

4 Probabilités conditionnelles, indépendance d'événements

Exercice 4.1. *On considère une pièce truquée, pour laquelle la probabilité d'obtenir "face" est $p \in]0;1[$.*
Deux joueurs A et B lancent alternativement la pièce, et A commence.
On suppose que les lancers sont mutuellement indépendants.
Le premier qui obtient "face" a gagné la partie.

1. *Construire un espace probabilisé (Ω, P) qui modélise cette expérience aléatoire. Est-il fini ? Dénombrable ?*
2. *Quelle est la probabilité que le jeu se termine au $n^{ième}$ lancer ?*
3. *Quelle est la probabilité que le jeu se termine ?*
4. *Quelle est la probabilité que A gagne le jeu ?*
5. *Si la pièce est équilibrée, lequel des deux joueurs a l'avantage ?*
6. *Pour quelles valeurs de p le joueur A a-t-il l'avantage ?*

Exercice 4.2. *Une boite contient deux jetons : un noir et un rouge.*
On tire n fois un jeton dans cette boite en le remettant après avoir noté sa couleur.
On note A_n l'événement "on obtient des jetons des deux couleurs au cours des n tirages" et B_n l'événement "on obtient au plus un jeton noir".

1. *Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$.*
2. *A_n et B_n sont-ils indépendants si $n = 2$?*
3. *Même question si $n = 3$.*

5 Formule des probabilités totales et formule de Bayes

Exercice 5.1. *Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre 4 itinéraires* A, B, C *et* D.
La probabilité qu'il a de choisir A (resp. B,C) est $\frac{1}{3}$ *(resp.* $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}\big)$.
La probabilité d'arriver en retard en empruntant A (resp. B,C) est $\frac{1}{20}$ *(resp.* $\frac{1}{10}, \frac{1}{5}\big)$.
En empruntant l'itinéraire D, l'élève n'arrive jamais en retard.

1. *Quelle est la probabilité que l'élève choisisse le chemin D ?*
2. *L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire C ?*

Exercice 5.2. *Quatre urnes contiennent des jetons :*

- *l'urne 1 contient 3 jetons rouges, 2 jetons blancs, 3 jetons noirs ;*
- *l'urne 2 contient 4 jetons rouges, 3 jetons blancs, 1 jeton noir ;*
- *l'urne 3 contient 2 jetons rouges, 1 jeton blanc, 1 jeton noir ;*
- *l'urne 4 contient 1 jeton rouge, 6 jetons blancs, 2 jetons noirs.*

On choisit au hasard une urne et de celle-ci l'on tire un jeton au hasard.
On note :

- U_i *l'événement "choisir l'urne* i*"*
- B *l'événement "tirer un jeton blanc"*
- R *: l'événement "tirer un jeton rouge"*
- N *l'événement "tirer un jeton noir".*

1. *À l'aide de la formule des probabilités totales, calculer la probabilité que ce jeton ne soit pas blanc.*
2. *Si le jeton est rouge, quelle est la probabilité qu'il ait été tiré de l'urne 3 ?*

Exercice 5.3. *On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes :*

- *si l'appareil fonctionne à l'instant* $n-1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, *il a la probabilité* $\frac{1}{6}$ *d'être en panne à l'instant* n.
- *si l'appareil est en panne à l'instant* $n-1$, *il a la probabilité* $\frac{2}{3}$ *d'être en panne à l'instant* n.

On note F_n *l'événement "l'appareil est en état de marche à l'instant* n*" et* p_n *la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant* n $(p_n = P(F_n))$.

1. *Établir pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *une relation entre* p_n *et* p_{n-1}.

2. *On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, q_n = p_n - \frac{2}{3}$. Quelle est la nature de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire une expression de q_n en fonction de n et p_0.*
3. *Exprimer p_n en fonction de n et de p_0.*
4. *Étudier la convergence de la suite (p_n).*

Exercice 5.4. *Trois enfants A, B, C jouent avec une balle. Lorsque A a la balle, la probabilité pour qu'il l'envoie à B est 0,75, et la probabilité pour qu'il l'envoie à C est 0,25 .*
Lorsque B a la balle, il l'envoie respectivement à A et C avec les probabilités 0,75 et 0,25 . Quant à lui, C envoie toujours la balle à B.
On désigne par A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement "l'enfant A (respectivement B, C) a la balle à l'issue du $n^{\text{ième lancer}}$ "
On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des événements A_n, B_n, C_n On note aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. *Quelle remarque pouvez-vous faire sur la valeur de $a_n + b_n + c_n$?*
2. *A l'aide de la formule des probabilités totales exprimer $P(A_{n+1})$ en fonction de $P(A_n), P(B_n)$ et $P(C_n)$.*
   Procéder de même pour $P(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1})$.
3. *Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N} : X_{n+1} = MX_n$.*
4. *Diagonaliser M. On notera P et D les matrices respectivement inversible et diagonales telles que $M = PDP^{-1}$.*
5. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = PD^nP^{-1}X_0$.*
6. *Calculer les limites lorsque $n \to +\infty$ de a_n, b_n, c_n.*
   On vérifiera que ces limites sont indépendantes de l'enfant qui avait la balle au début du jeu.

Exercice 5.5. *Un distributeur de jouets distingue trois catégories de jouets :*

- *catégorie T : les jouets traditionnels tels que poupées, peluches,*
- *catégorie M : les jouets liés à la mode inspirés directement d'un livre, d'un film, d'une émission,*
- *catégorie S : les jouets scientifiques vulgarisant une technique récente.*

Le distributeur de jouets a fait les estimations suivantes :

- *Un client qui a acheté un jouet traditionnel une année pour noël choisira, l'année suivante, un jouet de l'une des trois catégories avec une équiprobabilité.*
- *Un client qui a acheté un jouet inspiré par la mode optera l'année suivante pour un jouet de la catégorie T avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet de la catégorie M avec la probabilité $\frac{1}{4}$, et pour un jouet de la catégorie S avec la probabilité $\frac{1}{2}$.*

- *Un client qui a acheté un jouet scientifique optera l'année suivante pour un jouet de la catégorie T avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet de la catégorie M avec la probabilité $\frac{1}{2}$, et pour un jouet de la catégorie S avec la probabilité $\frac{1}{4}$.*

Une année, que l'on appellera l'année 0 *:* 45% *des jouets vendus étaient de la catégorie* T, 25% *étaient de la catégorie* M *et* 30% *étaient de la catégorie* S.
On note :

- T_n *l'événement "le client achète un jouet de la catégorie T pour le noël de l'année n ",*
- M_n *l'événement "le client achète un jouet de la catégorie M pour le noël de l'année n",*
- S_n *l'événement "le client achète un jouet de la catégorie S pour le noël de l'année n".*

Enfin on pose $p_n = P(T_n), q_n = P(M_n)$ *et* $r_n = P(S_n)$.

1. *Donner les valeurs de* $p_0, q_0,$ *et* r_0.
2. *A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que* $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n$.
3. *De la même façon exprimer* q_{n+1} *et* r_{n+1} *en fonction de* p_n, q_n *et* r_n.
4. *On pose alors* $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$. *Exprimer* X_{n+1} *en fonction de* X_n, *à l'aide d'une matrice* A *que l'on formera.*
5. *Soit* P *la matrice définie par* $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) *Vérifier que* $P^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 8 & -3 & -3 \\ 0 & 11 & -11 \end{pmatrix}$
   (b) *Déterminer la matrice* $D = P^{-1}AP$.
   (c) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$ *puis expliciter* A^n.
6. *Montrer que pour tout entier* $n, X_n = A^nX_0$.
7. *Exprimer* $p_n, q_n,$ *et* r_n *en fonction de* n.
8. *Déterminer les limites de* p_n, q_n *et* r_n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.