Exercices
Chap.6 : Réduction

1 Éléments propres

Exercice 1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E admettant une valeur propre λ. Montrer que le sous-espace propre E_λ est un sous-espace vectoriel de E stable par f.*

Exercice 1.2. *Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 + f + \mathrm{id}_E = 0$.*

1. *On suppose dans cette question que f admet une valeur propre λ. Montrer que $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.*
   Indication : *Utiliser un vecteur propre associé àλ.*
2. *En déduire que f n'admet pas de valeur propre.*

Exercice 1.3. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que $A^3 + A^2 - A - I_3 = 0$.*
2. *Montrer que si λ est une valeur propre de A alors $\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$*
   En déduire que $\mathrm{sp}(A) \subset \{-1; 1\}$
3. *Sans calculer le polynôme caractéristique de A, déterminer les valeurs propres de A.*

Exercice 1.4. *Soit u l'application définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par :*

$$u(P) = P(-1)X^2 + P(1)$$

1. *Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.*
2. *Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.*
3. *Trouver les valeurs propres de u ainsi qu'une base de chacun des sous-espaces propres.*

Exercice 1.5. *Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.*
On dit qu'un endomorphisme f de E est ***nilpotent*** *s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$.*
Montrer que si f est un endomorphisme nilpotent alors $\chi_f(\lambda) = \lambda^n$.
Indication : *on raisonnera par récurrence sur n.*

2 Diagonalisation

Exercice 2.1. *La matrice* $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est-elle diagonalisable dans* $\mathbb{R}$? *dans* $\mathbb{C}$ *?*

Exercice 2.2. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur* α *pour que la matrice* $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 2+\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\alpha \end{pmatrix}$ *soit diagonalisable dans* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2.3. *Diagonaliser les matrices de* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

3 Trigonalisation

Exercice 3.1. *On définit les deux matrices suivantes :*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer* $E_1(T) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / TX = X\}$.
   T *est-elle diagonalisable ?*
2. *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *canoniquement associé à* T.
   Déterminer des vecteurs u_1, u_2 *et* u_3 *non nuls et tels que :*
   $$f(u_1) = u_1, f(u_2) = u_1 + u_2 \text{ et } f(u_3) = 0.$$
   Montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^3$. *Écrire la matrice de* f *dans cette base.*
3. *Montrer que* T *et* L *sont semblables.*

Exercice 3.2. *On note* $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.
Soit f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base* $\mathscr{B}$ *est :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (a) *Soit* $u_1 = e_1 + e_2$. *Calculer les coordonnées de* $f(u_1)$ *dans la base* $\mathscr{B}$. *Que peut-on en déduire pour* u_1 ?

   (b) *Montrer que 1 est l'unique valeur propre de* f.

   (c) *L'endomorphisme* f *est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?*

2. *On considère les éléments de* $\mathbb{R}^3$: $u_2 = pe_2 + qe_3$ *et* $u_3 = re_1 + se_3$, *où* p, q, r, s *sont des réels.*

   (a) *Déterminer* u_2 *et* u_3 *pour que :*

   $$f(u_2) = u_1 + u_2 \quad \text{et} \quad f(u_3) = 2u_2 + u_3$$

   (b) *Vérifier alors que* $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

   (c) *Écrire la matrice* A' *de* f *dans la base* $\mathscr{B}'$.

   (d) *Calculer, pour tout entier* n, $(A')^n$. *(les calculs devront figurer sur la copie).*

   (e) *En déduire, pour tout entier* n, A^n.

4 Équations matricielles

Exercice 4.1. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer le polynôme caractéristique de* A.
2. *Montrer que* A *est diagonalisable et déterminer la matrice diagonale* D *et la matrice de passage* P.
3. (a) *Soit* $Y \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *telle que* $Y^3 = D$. *Justifier que* Y *commute avec* D *et en déduire que* Y *est une matrice diagonale.*

   (b) *En déduire l'ensemble des matrice* $Y \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *telles que* $Y^3 = D$.
4. *A l'aide de la question précédente, déterminer l'ensemble des matrices* $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *telles que* $M^3 = A$.
   Indication : *on pourra poser* $N = P^{-1}MP$ *et trouver l'équation vérifiée par* N.

Exercice 4.2. *On considère une matrice carrée d'ordre* 3 : $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^3$ *de matrice* J *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.
On considère, pour tout réel a, *la matrice carrée réelle d'ordre* 3 : $M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

1. (a) *Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de* f.

(b) *Montrer que J est diagonalisable. Déterminer une matrice réelle diagonale D d'ordre trois et une matrice réelle inversible P d'ordre trois telles que $J = PDP^{-1}$.*

(c) *En déduire que, pour tout nombre réel a, il existe une matrice réelle diagonale D_a d'ordre trois, que l'on calculera, telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.*

(d) *Quel est l'ensemble des nombres réels a tels que M_a soit inversible ?*

2. *On se propose, dans cette question, de déterminer l'ensemble des nombres réels a tels qu'il existe une matrice carrée réelle d'ordre trois vérifiant $X^2 = M_a$.*

   (a) *Soient a un nombre réel et X une matrice carrée réelle d'ordre trois tels que $X^2 = M_a$*

      i. *Montrer que X commute avec M_a, puis que X commute avec J.*

      ii. *On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice X dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déduire de la question précédente que tout vecteur propre de f est vecteur propre de h.*

      iii. *Établir qu'il existe une matrice réelle diagonale Δ d'ordre trois telle que $X = P\Delta P^{-1}$ et montrer : $\Delta^2 = D_a$.*

      iv. *En déduire : $a \geqslant 2$.*

   (b) *Réciproquement, montrer que, pour tout nombre réel a supérieur ou égal à 2 , il existe une matrice carrée réelle X d'ordre trois telle que $X^2 = M_a$.*

   (c) *Conclure.*

5 Suites récurrentes d'ordre 2

Exercice 5.1. *Calculer le terme général des suites suivantes :*

1. $\forall n \in \mathbb{N}, 2f_{n+2} + f_{n+1} - f_n = 0$ *et* $f_0 = f_1 = 1$;
2. $\forall p \in \mathbb{N}, h_{p+2} = 2h_p$ *et* $h_0 = 1$ *et* $h_1 = 0$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ *et* $u_0 = u_1 = 1$;
4. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$ *et* $u_0 = 0$ *et* $u_1 = 1$

Exercice 5.2. *Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère le déterminant d'ordre n suivant :*

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

1. *Calculer D_1 et D_2.*
2. *A l'aide d'opérations sur les lignes et/ou les colonnes, montrer que :*

$$D_n = \begin{vmatrix} -2 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

3. *En déduire que, pour tout $n \geqslant 3, D_n = -2D_{n-1} - D_{n-2}$.*
4. *En déduire, alors, la valeur de D_n pour tout $n \geqslant 1$.*

6 Systèmes différentiels

Exercice 6.1. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système différentiel :* $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$

Exercice 6.2. *On considère le système différentiel :* $(S) \begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$.

1. *Déterminer la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $(S) \Leftrightarrow X'(t) = AX(t)$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.*
2. *Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable mais qu'elle est trigonalisable.*
3. *Déterminer des matrices colonnes U, V et W non nulles et telles que :*

$$AU = -U \quad AV = 0 \quad AW = V$$

   En déduire une matrice P inversible et une matrice T triangulaire telles que $A = PTP^{-1}$
4. *A l'aide du changement de fonction inconnue $X(t) = PY(t)$ résoudre le système (S).*

Exercice 6.3. *On considère le système différentiel* $(S) \begin{cases} x' = x + 8y + \mathrm{e}^t \\ y' = 2x + y + \mathrm{e}^{-3t} \end{cases}$

1. *Déterminer la matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et la matrice $B(t) \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telles que $(S) \Leftrightarrow X'(t) = AX(t) + B(t)$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$*
2. *Diagonaliser la matrice A.*

3. *Résoudre le système homogène* (S_H) : $X'(t) = AX(t)$. *(On posera* $X(t) = PY(t)$*.)*
4. *Montrer que le couple de fonctions* (x_p, y_p) *définies par :*

$$x_p(t) = -\left(t + \frac{1}{8}\right) \mathrm{e}^{-3t} \text{ et } y_p(t) = -\frac{1}{8}\mathrm{e}^{t} + \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{16}\right) \mathrm{e}^{-3t}$$

est une solution particulière du système (S).

5. *En déduire l'ensemble des solutions du système* (S).