Chap.31 : Comparaison des fonctions

1 Domination et négligeabilité

Dans ce chapitre :

- I désigne un intervalle non réduit à un point ;
- f et g désignent deux fonctions définies sur I, à valeurs réelles ;
- $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est soit un point de I, soit l'un de ses extrémités.
- on suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de a, sauf éventuellement en a.
  Lorsque $g(a) = 0$, on imposera que $f(a) = 0$.

1.1 Domination

Définition 1.1. *On dit que f est **dominée** par g au voisinage de a lorsque le quotient $\frac{f}{g}$ est borné au voisinage de a :*

$$\exists V \in \mathscr{V}(a), \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in V, \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M$$

*On notera $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$. On dit que f est un "**grand O**" de g au voisinage de a.*

Remarque 1.2. *$f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$ lorsqu'il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ bornée au voisinage de a telle que :*

$$\forall x \in I, f(x) = \varphi(x) \times g(x)$$

Proposition 1.3. *Caractérisation des fonctions bornées.*
f est bornée au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si

$$f(x) = \underset{x\to a}{O}(1).$$

où 1 désigne la fonction constante égale à 1.

Méthode 1.4. *Pour montrer que $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$, on peut :*

- *soit utiliser un calcul de limite : on montre que $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}$. On sait alors que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a.*
- *soit étudier la fonction $x \mapsto \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ et en chercher un majorant.*

Application 1.5. *Montrer que :*

1. $3x^3 - 3x = \underset{x\to+\infty}{O}(5x^3)$
2. $3sin(x) + 2x = \underset{x\to 0}{O}(x)$

Proposition 1.6. *Si f, g et h trois fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a) alors :*

- $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x)) \Leftrightarrow f(x)h(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x)h(x))$
- *si* $f(x) = \underset{x\to a}{O}(h(x))$ *et si* $g(x) = \underset{x\to a}{O}(h(x))$ *alors* $f(x) + g(x) = \underset{x\to a}{O}(h(x))$
- *si* $f(x) = \underset{x\to a}{O}(h(x))$ *alors, pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}^*$*, on a si* $\lambda f(x) = \underset{x\to a}{O}(h(x))$.

Preuve :

1.2 Négligeabilité

Définition 1.7. *On dit que f est* ***négligeable*** *devant g au voisinage de a lorsque* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
On notera $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$*. On dit que f est un* ***"petit o"*** *de g au voisinage de a.*

Remarque 1.8. $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ *lorsqu'il existe une fonction* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *telle que :*

- $\forall x \in I, f(x) = \varphi(x) \times g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$

Théorème 1.9. ***Croissances comparées.***
Pour $a > 0$ et $b > 0$:

- $(ln(x))^b = \underset{x \to +\infty}{o}(x^a)$
- $(ln(x))^b = \underset{x \to 0^+}{o}(\frac{1}{x^a})$
- $x^a = \underset{x \to +\infty}{o}(e^{bx})$

Méthode 1.10. *Pour démontrer que* $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$*, on montre que* $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Application 1.11. *Démontrer que :*

1. $3x^3 + 2x^2 = \underset{x \to +\infty}{o}(3^x)$
2. $x^3 cos(x) = \underset{x \to 0}{o}(x^2)$
3. $ln(x^4) = \underset{x \to +\infty}{o}(3x + 2)$

Proposition 1.12. *Soient f, g, h et k quatre fonctions définies sur I et à valeurs réelles. Sous réserve que ces dernières remplissent les conditions permettant d'écrire les relations suivantes, on a :*

- ***Transitivité :*** *si* $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$ *et* $g(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$ *alors :*

$$f(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$$

- ***Multiplication par un réel :*** *si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et si* $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$ *alors :*

$$\lambda f(x) = \underset{x \to a}{o}(\lambda g(x))$$

- ***Addition :*** *si* $f(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$ *et si* $g(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$ *alors :*

$$f(x) + g(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$$

- ***Produit :*** *si* $f(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$ *et si* $g(x) = \underset{x \to a}{o}(k(x))$ *alors :*

$$f(x) \times g(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x) \times k(x))$$

- ***Puissance*** *: si $f > 0$ et $g > 0$ au voisinage de a et si* $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$ *alors :*

$$(f(x))^\alpha = \underset{x \to a}{o}((g(x))^\alpha)$$

Preuve :

Remarque 1.13. *Ces résultats « d'opérations » avec la notion de négligeabilité sont vrais en adaptant leur formulation au contexte, dans le cadre de la notion de prépondérance et de domination présentées dans le cadre des suites.*

2 Équivalence

2.1 Définition et opérations

Définition 2.1. *On suppose que pour tout $x \in I - \{a\}, f(x) \neq 0$.*
On dit que f est ***équivalente*** *à g au voisinage de a lorsque $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.*
On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

Remarque 2.2. *$f(x) \underset{x \to a}{\sim} (g(x))$ lorsqu'il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ telle que :*

- $\forall x \in I, f(x) = (1 + \varphi(x)) \times g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$

Proposition 2.3.

- $f(x) \underset{x \to a}{\sim} (g(x)) \Leftrightarrow g(x) \underset{x \to a}{\sim} (f(x))$
- $f(x) \underset{x \to a}{\sim} (g(x)) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$

Méthode 2.4. *Pour démontrer que $f(x) \underset{x \to a}{\sim} (g(x))$, on montre que :*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Application 2.5. *Démontrer les relations d'équivalence suivantes :*

1. $(x-1)^2 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$
2. $e^x \underset{x \to +\infty}{\sim} e^x - 1$
3. $ln(1+x) \underset{x \to +\infty}{\sim} ln(x)$

Proposition 2.6. *Si* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} (g(x))$ *alors* f *et* g *sont de même signe au voisinage de* a.

Proposition 2.7. *Soient* f, g, h *et* k *quatre fonctions définies sur* I *et à valeurs réelles. Sous réserve que ces dernières remplissent les conditions permettant d'écrire les relations suivantes, on a :*

- ***Transitivité :*** *si* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ *et* $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ *alors :*
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$$
- ***Multiplication par un réel non nul :*** *si* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *et si* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ *alors :*
$$\lambda f(x) \underset{x\to a}{\sim} \lambda g(x)$$
- ***Produit :*** *si* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ *et si* $g(x) \underset{x\to a}{\sim} k(x)$ *alors :*
$$f(x) \times g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x) \times k(x)$$
- ***Passage à l'inverse :*** *si* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ *et si* g *est non nulle au voisinage de* a *alors :*
$$\frac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{1}{g(x)}$$
- ***Puissance*** *:Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$, *si* $g > 0$ *au voisinage de* a *et si* $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ *alors :*
$$(f(x))^\alpha \underset{x\to a}{\sim} (g(x))^\alpha$$

Application 2.8. *Donner des équivalents de* f *au voisinage de* $+\infty$ *:*

1. $f(x) = (x-1)^8$
2. $f(x) = (ln(x+1)) \times (x-1)^8$
3. $f(x) = \frac{ln(x-1)}{e^x - 1}$

2.2 Équivalents de référence

Proposition 2.9. *Si f est la fonction polynomiale de degré n définie par $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ alors :*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \underset{x \to +\infty}{\sim} a_n x^n$$

Preuve :

Proposition 2.10. *Soit une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors :*

- $e^{u(x)} - 1 \underset{x \to a}{\sim} u(x)$
- $sin(u(x)) \underset{x \to a}{\sim} u(x)$
- $ln(1 + u(x)) \underset{x \to a}{\sim} u(x)$
- $(1 + u(x))^{\alpha} - 1 \underset{x \to a}{\sim} \alpha u(x)$
- $tan(u(x)) \underset{x \to a}{\sim} u(x)$
- $1 - cos(u(x)) \underset{x \to a}{\sim} \frac{1}{2} u^2(x)$
- $arcsin(u(x)) \underset{x \to a}{\sim} u(x)$
- $arctan(u(x)) \underset{x \to a}{\sim} u(x)$

Application 2.11. *Donner un équivalent simple au voisinage de a :*

1. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - 1$ *avec* $a = +\infty$
2. $f(x) = \frac{1-x}{ln(x)}$ *avec* $a = 1$ *(on pourra procéder à un changement de variable).*
3. $f(x) = sin^3(x) \times ln(1 + \frac{x^2}{3})$ *avec* $a = 0$.
4. $f(x) = \sqrt{1 + sin^3(x)} - 1$ *avec* $a = 0$.

2.3 Équivalents et calcul de limites

Proposition 2.12.
- *Si* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ *et si* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$ *alors* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
- *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$ *(limite finie non nulle) alors* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$.

Application 2.13. *Déterminer :*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^3 sin(\frac{2}{x^3})$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{tan(\frac{1}{x})\times(3x^3-2)}{2x^2+1}$