

Chap.31 : Comparaison des fonctions

1 Domination et négligeabilité

Dans ce chapitre :

- I désigne un intervalle non réduit à un point ;
- f et g désignent deux fonctions définies sur I , à valeurs réelles ;
- $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est soit un point de I , soit l'un de ses extrémités.
- on suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de a , sauf éventuellement en a .
Lorsque $g(a) = 0$, on imposera que $f(a) = 0$.

1.1 Domination

Définition 1.1. On dit que f est **dominée** par g au voisinage de a lorsque le quotient $\frac{f}{g}$ est borné au voisinage de a :

$$\exists V \in \mathcal{V}(a), \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in V, \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M$$

On notera $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$. On dit que f est un "**grand O**" de g au voisinage de a .

Remarque 1.2. $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$ lorsqu'il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ bornée au voisinage de a telle que :

$$\forall x \in I, f(x) = \varphi(x) \times g(x)$$

Proposition 1.3. Caractérisation des fonctions bornées.
 f est bornée au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si

$$f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(1).$$

où 1 désigne la fonction constante égale à 1.

Méthode 1.4. Pour montrer que $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$, on peut :

- soit utiliser un calcul de limite : on montre que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}$. On sait alors que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a .
- soit étudier la fonction $x \mapsto \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ et en chercher un majorant.

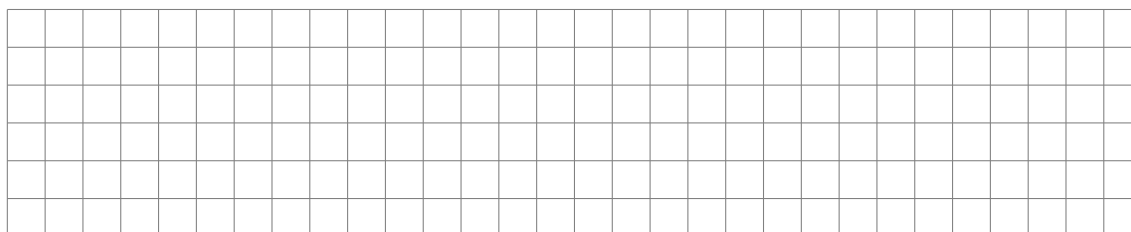
Application 1.5. Montrer que :

- $(\ln(x))^b = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^a)$
- $x^a = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(e^{bx})$
- $(\ln(x))^b = \underset{x \rightarrow 0^+}{o}\left(\frac{1}{x^a}\right)$

Méthode 1.10. Pour démontrer que $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$, on montre que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Application 1.11. Démontrer que :

1. $3x^3 + 2x^2 = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(3^x)$
2. $x^3 \cos(x) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2)$
3. $\ln(x^4) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(3x + 2)$



Proposition 1.12. Soient f, g, h et k quatre fonctions définies sur I et à valeurs réelles. Sous réserve que ces dernières remplissent les conditions permettant d'écrire les relations suivantes, on a :

- **Transitivité** : si $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$ et $g(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(h(x))$ alors :

$$f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(h(x))$$

- **Multiplication par un réel** : si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$ alors :

$$\lambda f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(\lambda g(x))$$

- **Addition** : si $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(h(x))$ et si $g(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(h(x))$ alors :

$$f(x) + g(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(h(x))$$

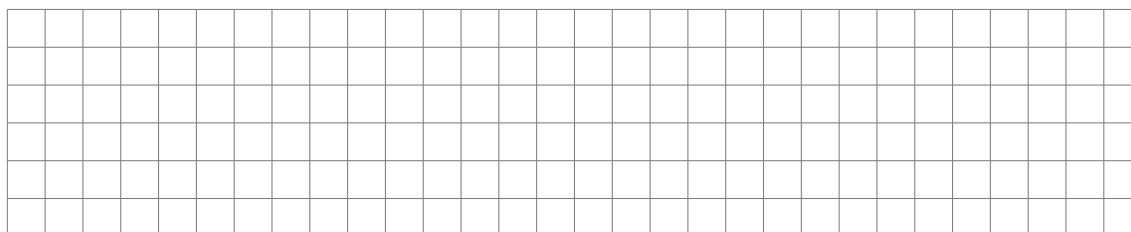
- **Produit** : si $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(h(x))$ et si $g(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(k(x))$ alors :

$$f(x) \times g(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(h(x) \times k(x))$$

- **Puissance** : si $f > 0$ et $g > 0$ au voisinage de a et si $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$ alors :

$$(f(x))^\alpha = \underset{x \rightarrow a}{o}((g(x))^\alpha)$$

Preuve :



Remarque 1.13. Ces résultats « d'opérations » avec la notion de négligeabilité sont vrais en adaptant leur formulation au contexte, dans le cadre de la notion de prépondérance et de domination présentées dans le cadre des suites.

2 Équivalence

2.1 Définition et opérations

Définition 2.1. On suppose que pour tout $x \in I - \{a\}$, $f(x) \neq 0$.

On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a lorsque $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On note alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

Remarque 2.2. $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g(x))$ lorsqu'il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- $\forall x \in I, f(x) = (1 + \varphi(x)) \times g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$

Proposition 2.3. • $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g(x)) \Leftrightarrow g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (f(x))$

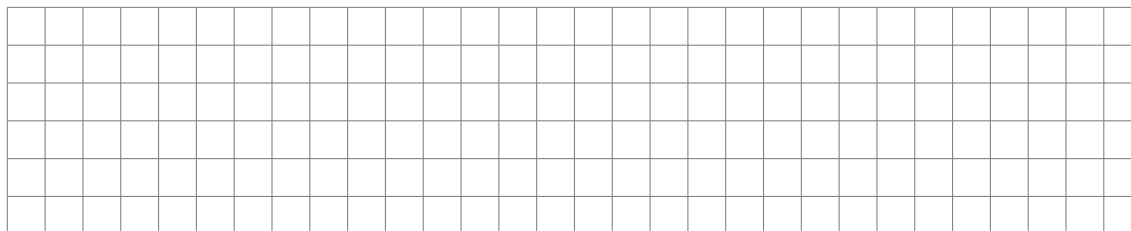
- $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g(x)) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$

Méthode 2.4. Pour démontrer que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g(x))$, on montre que :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Application 2.5. Démontrer les relations d'équivalence suivantes :

1. $(x - 1)^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$
2. $e^x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x - 1$
3. $\ln(1 + x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$



Proposition 2.6. Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g(x))$ alors f et g sont de même signe au voisinage de a .

Proposition 2.7. Soient f, g, h et k quatre fonctions définies sur I et à valeurs réelles. Sous réserve que ces dernières remplissent les conditions permettant d'écrire les relations suivantes, on a :

- **Transitivité** : si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$ alors :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$$

- **Multiplication par un réel non nul** : si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ alors :

$$\lambda f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \lambda g(x)$$

- **Produit** : si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$ et si $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} k(x)$ alors :

$$f(x) \times g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x) \times k(x)$$

- **Passage à l'inverse** : si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et si g est non nulle au voisinage de a alors :

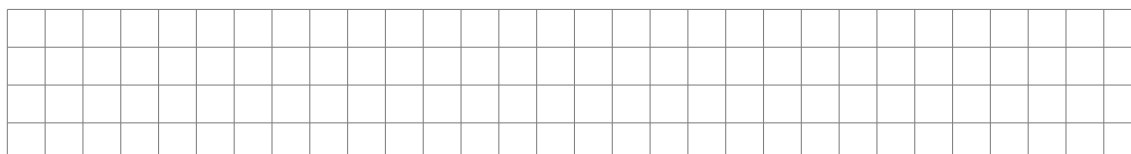
$$\frac{1}{f(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{1}{g(x)}$$

- **Puissance** : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, si $g > 0$ au voisinage de a et si $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$ alors :

$$(f(x))^\alpha \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g(x))^\alpha$$

Application 2.8. Donner des équivalents de f au voisinage de $+\infty$:

1. $f(x) = (x - 1)^8$
2. $f(x) = (\ln(x + 1)) \times (x - 1)^8$
3. $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{e^x - 1}$



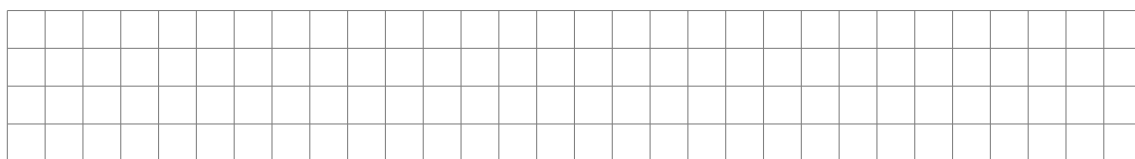
2.2 Équivalents de référence

Proposition 2.9. Si f est la fonction polynomiale de degré n définie par

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \text{ avec } (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \text{ alors :}$$

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_n x^n$$

Preuve :

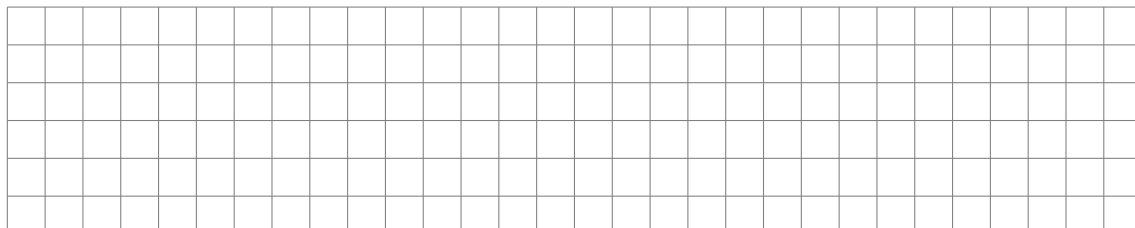


Proposition 2.10. Soit une fonction $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors :

- $e^{u(x)} - 1 \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x)$
- $\sin(u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x)$
- $\ln(1 + u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x)$
- $(1 + u(x))^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow a}{\sim} \alpha u(x)$
- $\tan(u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x)$
- $1 - \cos(u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{1}{2} u^2(x)$
- $\arcsin(u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x)$
- $\arctan(u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x)$

Application 2.11. Donner un équivalent simple au voisinage de a :

1. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - 1$ avec $a = +\infty$
2. $f(x) = \frac{1-x}{\ln(x)}$ avec $a = 1$ (on pourra procéder à un changement de variable).
3. $f(x) = \sin^3(x) \times \ln(1 + \frac{x^2}{3})$ avec $a = 0$.
4. $f(x) = \sqrt{1 + \sin^3(x)} - 1$ avec $a = 0$.



2.3 Équivalents et calcul de limites

Proposition 2.12. • Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

• Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$ (limite finie non nulle) alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell$.

Application 2.13. Déterminer :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 \sin\left(\frac{2}{x^3}\right)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right) \times (3x^3 - 2)}{2x^2 + 1}$

