

# Chap.31 : Comparaison des fonctions

## 1 Domination et négligeabilité

Dans ce chapitre :

- $I$  désigne un intervalle non réduit à un point ;
- $f$  et  $g$  désignent deux fonctions définies sur  $I$ , à valeurs réelles ;
- $a \in \overline{\mathbb{R}}$  est soit un point de  $I$ , soit l'un de ses extrémités.
- on suppose que  $g$  ne s'annule pas sur un voisinage de  $a$ , sauf éventuellement en  $a$ .  
Lorsque  $g(a) = 0$ , on imposera que  $f(a) = 0$ .

### 1.1 Domination

**Définition 1.1.** On dit que  $f$  est **dominée** par  $g$  au voisinage de  $a$  lorsque le quotient  $\frac{f}{g}$  est borné au voisinage de  $a$  :

$$\exists V \in \mathcal{V}(a), \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in V, \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M$$

On notera  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$ . On dit que  $f$  est un "**grand O**" de  $g$  au voisinage de  $a$ .

**Remarque 1.2.**  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$  lorsqu'il existe une fonction  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  bornée au voisinage de  $a$  telle que :

$$\forall x \in I, f(x) = \varphi(x) \times g(x)$$

**Proposition 1.3. Caractérisation des fonctions bornées.**  
 $f$  est bornée au voisinage de  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  si et seulement si

$$f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(1).$$

où 1 désigne la fonction constante égale à 1.

**Méthode 1.4.** Pour montrer que  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$ , on peut :

- soit utiliser un calcul de limite : on montre que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}$ . On sait alors que la fonction  $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$  est bornée au voisinage de  $a$ .
- soit étudier la fonction  $x \mapsto \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$  et en chercher un majorant.

**Application 1.5.** Montrer que :

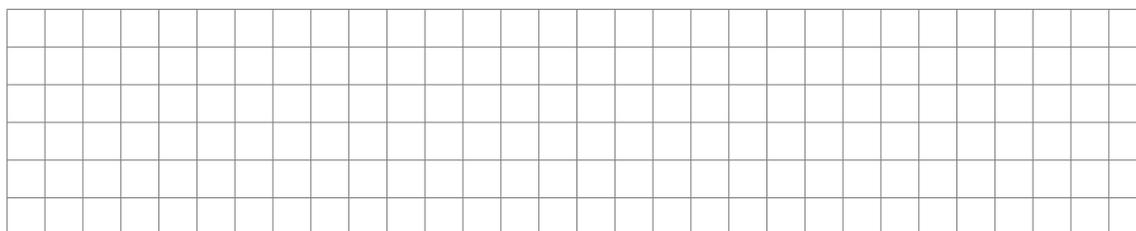


- $(\ln(x))^b = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^a)$
- $x^a = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(e^{bx})$
- $(\ln(x))^b = \underset{x \rightarrow 0^+}{o}\left(\frac{1}{x^a}\right)$

**Méthode 1.10.** Pour démontrer que  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$ , on montre que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

**Application 1.11.** Démontrer que :

1.  $3x^3 + 2x^2 = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(3^x)$
2.  $x^3 \cos(x) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2)$
3.  $\ln(x^4) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(3x + 2)$



**Proposition 1.12.** Soient  $f, g, h$  et  $k$  quatre fonctions définies sur  $I$  et à valeurs réelles. Sous réserve que ces dernières remplissent les conditions permettant d'écrire les relations suivantes, on a :

- **Transitivité** : si  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$  et  $g(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(h(x))$  alors :

$$f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(h(x))$$

- **Multiplication par un réel** : si  $\lambda \in \mathbb{R}$  et si  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$  alors :

$$\lambda f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(\lambda g(x))$$

- **Addition** : si  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(h(x))$  et si  $g(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(h(x))$  alors :

$$f(x) + g(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(h(x))$$

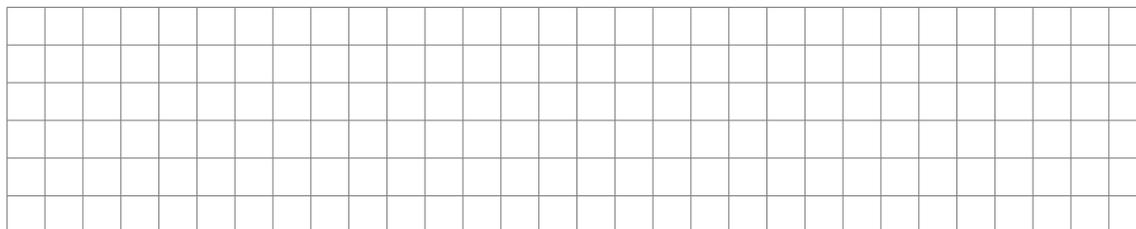
- **Produit** : si  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(h(x))$  et si  $g(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(k(x))$  alors :

$$f(x) \times g(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(h(x) \times k(x))$$

- **Puissance** : si  $f > 0$  et  $g > 0$  au voisinage de  $a$  et si  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$  alors :

$$(f(x))^\alpha = \underset{x \rightarrow a}{o}((g(x))^\alpha)$$

**Preuve :**



**Remarque 1.13.** Ces résultats « d'opérations » avec la notion de négligeabilité sont vrais en adaptant leur formulation au contexte, dans le cadre de la notion de prépondérance et de domination présentées dans le cadre des suites.

## 2 Équivalence

### 2.1 Définition et opérations

**Définition 2.1.** On suppose que pour tout  $x \in I - \{a\}$ ,  $f(x) \neq 0$ .

On dit que  $f$  est **équivalente** à  $g$  au voisinage de  $a$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

On note alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ .

**Remarque 2.2.**  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g(x))$  lorsqu'il existe une fonction  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

- $\forall x \in I, f(x) = (1 + \varphi(x)) \times g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$

**Proposition 2.3.** •  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g(x)) \Leftrightarrow g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (f(x))$

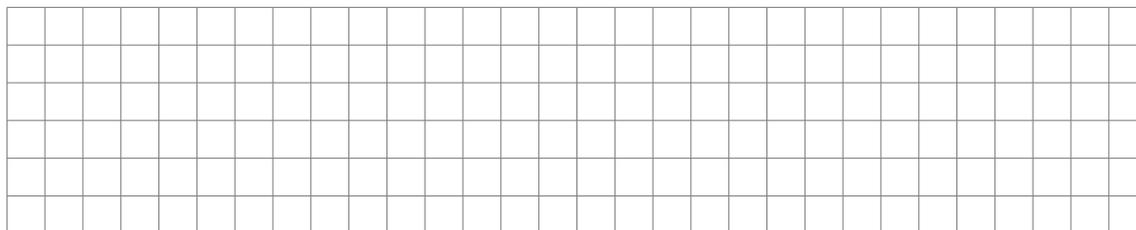
- $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g(x)) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$

**Méthode 2.4.** Pour démontrer que  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g(x))$ , on montre que :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

**Application 2.5.** Démontrer les relations d'équivalence suivantes :

1.  $(x - 1)^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$
2.  $e^x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x - 1$
3.  $\ln(1 + x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$



**Proposition 2.6.** Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g(x))$  alors  $f$  et  $g$  sont de même signe au voisinage de  $a$ .

**Proposition 2.7.** Soient  $f, g, h$  et  $k$  quatre fonctions définies sur  $I$  et à valeurs réelles. Sous réserve que ces dernières remplissent les conditions permettant d'écrire les relations suivantes, on a :

- **Transitivité** : si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  et  $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$  alors :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$$

- **Multiplication par un réel non nul** : si  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  et si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  alors :

$$\lambda f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \lambda g(x)$$

- **Produit** : si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$  et si  $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} k(x)$  alors :

$$f(x) \times g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x) \times k(x)$$

- **Passage à l'inverse** : si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  et si  $g$  est non nulle au voisinage de  $a$  alors :

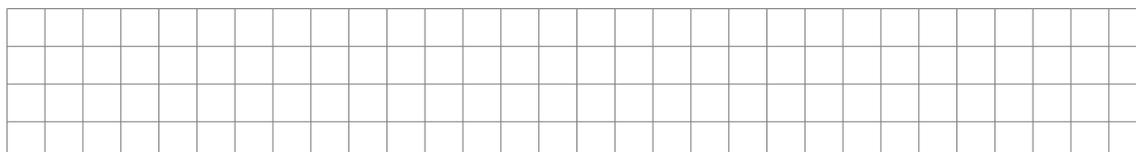
$$\frac{1}{f(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{1}{g(x)}$$

- **Puissance** : Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si  $g > 0$  au voisinage de  $a$  et si  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$  alors :

$$(f(x))^\alpha \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g(x))^\alpha$$

**Application 2.8.** Donner des équivalents de  $f$  au voisinage de  $+\infty$  :

1.  $f(x) = (x - 1)^8$
2.  $f(x) = (\ln(x + 1)) \times (x - 1)^8$
3.  $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{e^x - 1}$



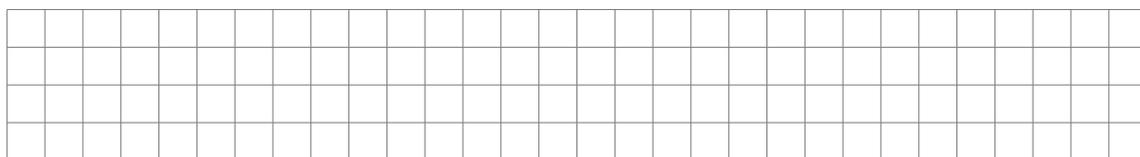
## 2.2 Équivalents de référence

**Proposition 2.9.** Si  $f$  est la fonction polynomiale de degré  $n$  définie par

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \text{ avec } (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \text{ alors :}$$

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_n x^n$$

**Preuve :**

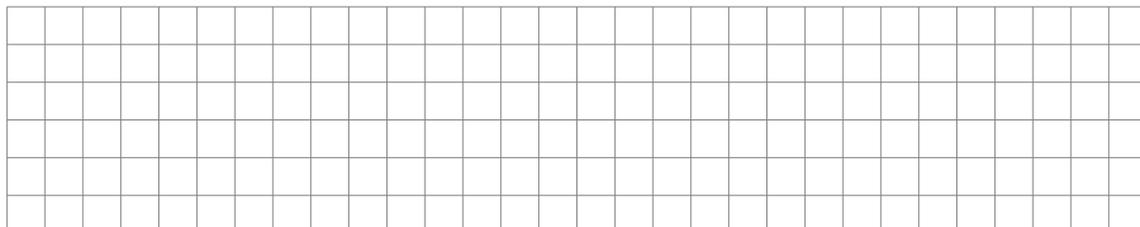


**Proposition 2.10.** Soit une fonction  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  alors :

- $e^{u(x)} - 1 \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x)$
- $\sin(u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x)$
- $\ln(1 + u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x)$
- $(1 + u(x))^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow a}{\sim} \alpha u(x)$
- $\tan(u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x)$
- $1 - \cos(u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{1}{2} u^2(x)$
- $\arcsin(u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x)$
- $\arctan(u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x)$

**Application 2.11.** Donner un équivalent simple au voisinage de  $a$  :

1.  $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - 1$  avec  $a = +\infty$
2.  $f(x) = \frac{1-x}{\ln(x)}$  avec  $a = 1$  (on pourra procéder à un changement de variable).
3.  $f(x) = \sin^3(x) \times \ln(1 + \frac{x^2}{3})$  avec  $a = 0$ .
4.  $f(x) = \sqrt{1 + \sin^3(x)} - 1$  avec  $a = 0$ .



### 2.3 Équivalents et calcul de limites

**Proposition 2.12.** • Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$  alors  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .

• Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$  (limite finie non nulle) alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell$ .

**Application 2.13.** Déterminer :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 \sin\left(\frac{2}{x^3}\right)$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right) \times (3x^3 - 2)}{2x^2 + 1}$

