Exercices Chap.7 : Manipuler des expressions trigonométriques

1 Sur le cercle trigonométrique

Exercice 1.1. *Donner la mesure principale des angles de mesure :*

1. $\frac{5\pi}{3}$;$\frac{3\pi}{2}$;$\frac{-5\pi}{4}$
2. 25π,-17π,-14π
3. $\frac{4\pi}{3}$,$\frac{-11\pi}{6}$,$\frac{-11\pi}{2}$
4. $\frac{40\pi}{3}$,$\frac{-31\pi}{6}$,$\frac{25\pi}{4}$

2 Propriétés du cosinus et du sinus

Exercice 2.1. *Simplifier les expressions suivantes où x désigne un réel quelconque :*

1. $A = cos(x + 3\pi) + sin(x - \frac{\pi}{2})$
2. $B = sin(\frac{\pi}{2} - x) + sin(\frac{\pi}{2} + x)$
3. $C = sin(\pi + x) + cos(\pi + x) - sin(-x)$
4. $D = sin(x - \frac{\pi}{2}) - cos(x + \pi)$
5. $E = 2sin(\frac{\pi}{2} + x) + sin(\frac{\pi}{2} - x) - cos(-x)$

3 Formules d'addition et de duplication

Exercice 3.1.

1. *Vérifier que* $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$
2. *En déduire* $cos(\frac{5\pi}{12})$ *et* $sin(\frac{5\pi}{12})$, *puis* $cos(\frac{11\pi}{12})$ *et* $sin(\frac{11\pi}{12})$

Exercice 3.2. *Démontre que pour tout réel x,*

$$cos(x) + sin(x) = \sqrt{2}sin(x + \varphi)$$

où φ est un réel dont on précisera la valeur.

Exercice 3.3. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

1. $cos(x) + cos(x + \frac{2\pi}{3}) + cos(x + \frac{4\pi}{3}) = 0$
2. $sin(x) + sin(x + \frac{2\pi}{3}) + sin(x + \frac{4\pi}{3}) = 0$

Exercice 3.4.

1. *Soit $x \in [0; \pi]$, exprimer $cos(\frac{x}{2})$ en fonction de $cos(x)$.*
2. *Écrire un algorithme qui donne une valeur de $cos(\frac{\pi}{2^n})$ pour $n \in \mathbb{N}$.*

3. *Donner la valeur de* $cos(\frac{\pi}{8})$ *et en déduire celle de* $sin(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 3.5. *Calculer* $cos(3x)$ *et* $cos(4x)$ *en fonction de* $cos(x)$.

Exercice 3.6. *Exprimer en fonction de* $sin(2x)$ *les expressions :*

$$(cos(x) + sin(x))^2 \text{ et } (cos(x) - sin(x))^2$$

4 Formules de factorisation

Exercice 4.1. *Montrer que* $\frac{cos(\frac{\pi}{12})+sin(\frac{\pi}{12})}{cos(\frac{\pi}{12})-sin(\frac{\pi}{12})} = \sqrt{3}$

Exercice 4.2. *Montrer que pour* $x \in \left]0; \frac{\pi}{6}\right[$ *:*

$$\frac{1-cos(2x)+cos(4x)-cos(6x)}{sin(2x)-sin(4x)+sin(6x)} = tan(3x)$$

5 Equations trigonométriques

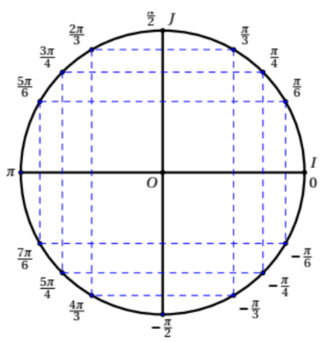
Exercice 5.1. 1. (a) *Déterminer un nombre a tel que* $cos(a) = \frac{1}{2}$.

(b) *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $cos(t) = \frac{1}{2}$.

(c) *Représenter les solutions de l'équation précédente par des points du cercle trigonométrique.*

2. *Faire de même pour les équations :*

(a) $sin(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ (b) $sin(3x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Exercice 5.2. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

1. $2cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ 2. $sin(2x - \frac{\pi}{4}) = cos(x + \frac{\pi}{6})$

Exercice 5.3. *Transformer les équations suivantes en des équations trigonométriques que vous savez résoudre :*

1. $sin(2x - \frac{\pi}{6}) = cos(\frac{x}{3})$
2. $cos(3x) = sin(2x)$
3. $cos^2(x) - sin^2(x) = sin(4x)$
4. $sin(x) + cos(x) = 1$
5. $\sqrt{3}cos(x) - sin(x) = -1$
6. $cos(2x) - \sqrt{3}sin(2x) = -\sqrt{2}$
7. $cos(x) - \sqrt{3}sin(x) = \sqrt{3}$

6 Inéquations trigonométriques

Exercice 6.1. *A l'aide d'une lecture sur le cercle trigonométrique, résoudre chacune des inéquations suivantes sur l'intervalle indiqué :*

1. $cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ *sur* $[0; 2\pi]$ *;*
2. $cos(x) \geq sin(x)$ *sur* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ *;*
3. $sin(x) \leq \frac{1}{2}$ *sur* $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right]$ *;*