Devoir Surveillé 2

Durée : 3 heures

Calculatrice interdite

Exercice 0.1. *1. Soit la fonction f définie par $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.*

(a) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ ainsi que le domaine de dérivabilité $\mathscr{D}'_f$.

(b) Calculer $f'(x)$ sur $\mathscr{D}'_f$.

(c) En déduire la dérivée sur $]1; +\infty[$ de la fonction

$$g : x \mapsto ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

dont on simplifiera au mieux l'expression.

2. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{3e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

(a) Déterminer les primitives de h sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire la primitive H de la fonction h qui s'annule en 0.

Exercice 0.2. *Extrait adapté de Mines de Douai 1984*

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x^2 - 1)Arctan(\tfrac{1}{2x-1})$$

et on appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. *Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ ainsi que le domaine de dérivabilité $\mathscr{D}'_f$.*
2. *Montrer que sur $\mathscr{D}'_f - \{0\}$ la dérivée de f peut s'exprimer sous la forme $f'(x) = 2xg(x)$ où*

$$g(x) = Arctan(\tfrac{1}{2x-1}) - \tfrac{x^2-1}{2x(2x^2-2x+1)}.$$

3. *Montrer que $g'(x) = -\frac{2x^4-4x^3+9x^2-4x+1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2}$.*
4. *On admet que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$$

Dresser le tableau de variation de g.

5. *Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ tel que $g(x) = 0$.*
6. *Quelles sont les variations de f ? (On ne demande pas les limites aux bornes).*
Indication : $\frac{-\pi}{2} + \frac{3}{2} < 0$

Exercice 0.3. *Extrait du concours commum 2006 des écoles des mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes*
Soit n un entier naturel.
Si n est non nul, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à un réel x lorsque c'est possible $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{2 - \cos x} - \dfrac{x}{n}$.
On note f_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à un réel x lorsque c'est possible $f_0(x) = \dfrac{\sin x}{2 - \cos x}$.

Généralités sur f_n.

Soit n un entier naturel fixé.

1. *Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_{f_n}$ de f_n.*

2. *f_n est-elle paire ? f_n est-elle impaire ? On justifiera sa réponse et on distinguera les cas $n = 0$ et $n \neq 0$.*

3. *f_n est-elle 2π-périodique ? On justifiera sa réponse et on distinguera les cas $n = 0$ et $n \neq 0$.*

Étude de la fonction f_0.

4. *Montrer qu'il suffit d'étudier f_0 sur $[0, \pi]$ pour tracer sa courbe sur $\mathscr{D}_{f_0}$ tout entier. On justifiera sa réponse.*

5. *Étudier la dérivabilité de f_0 sur $\mathscr{D}_{f_0}$. Déterminer l'expression de sa dérivée.*

6. *Étudier le signe de la dérivée de f_0 sur $[0, \pi]$.*

7. *Déterminer le tableau de variations sur $[0, \pi]$ et tracer l'allure de la courbe de f_0 sur $\mathbb{R}$ dans le plan rapporté à un repère adapté (pas nécessairement orthonormé).*

Indication : *$\frac{\sqrt{3}}{3}$ admet $0,577$ comme valeur approchée par défaut à 10^{-3} près.*

8. *Déterminer les valeurs maximales et minimales atteintes par $f_0(x)$ quand x parcourt $\mathbb{R}$.*
En déduire la valeur maximale atteinte par $|f_0(x)|$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$.

9. *Déterminer la primitive de f_0 sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\frac{\pi}{3}$.*