Exercices
Chap.36 : Polynômes

1 Opérations et degré

Exercice 1.1. *On considère le polynôme* $P(X) = X^2 - X + 1$.
Calculer $(P(X))^2$ *et* $(P \circ P)(X))$.

Exercice 1.2. *Etant donné* $n \in \mathbb{N}$, *on considère le polynôme :*

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

1. *Calculer* $P_0(X), P_1(X), P_2(X)$ *et* $P_3(X)$.
2. *Que peut-on dire de* $P_n(X)$ *pour* $n \in \mathbb{N}$ *?*

Exercice 1.3. *Déterminer le degré du polynôme*

$$P_n(X) = (X^2+1)^n + (X^2-1)^n - 2X^{2n} \text{ pour } n \in \mathbb{N} \text{ ?}$$

Exercice 1.4. *Déterminer les polynômes* $P \in \mathbb{C}[X]$ *vérifiant l'égalité :*

$$P(X^2) = (X^2+1)P(X).$$

Indication : on pourra commencer par déterminer le degré de P.

Exercice 1.5. *Déterminer les polynômes* $P \in \mathbb{C}[X]$ *vérifiant l'égalité :*

$$P'^2 = 4P.$$

Indication : on pourra commencer par déterminer le degré de P.

2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 2.1. *Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de* $X^3 + X^2 + 9$ *par* $X^2 - 2X + 3$.

Exercice 2.2. *Déterminer les réels* a *et* b *tels que le polynôme* $X^2 + aX + 1$ *divise le polynôme* $X^4 + bX^2 + 1$.

Exercice 2.3. *Déterminer les polynômes* $P \in \mathbb{C}[X]$ *de degré 3 dont le reste de la division euclidienne par* $X^2 - 1$ *est* $1 - X$ *et dont le reste de la division euclidienne par* $X^2 + 1$ *est* $X - 1$.

Exercice 2.4. *On considère deux nombres complexes* α *et* β *distincts et un polynôme* $P \in \mathbb{C}[X]$.
Exprimer le reste de la division euclidienne de $P(X)$ *par* $(X-\alpha)(X-\beta)$ *en fonction de* $P(\alpha)$ *et* $P(\beta)$.

3 Racines

Exercice 3.1. *On considère le polynôme*

$$P(X) = X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 + 2X + 1.$$

Montrer que -1 *est racine de* P *et déterminer son ordre de multiplicité.*

Exercice 3.2. *On considère dans* $\mathbb{R}[X]$ *le polynôme :*

$$P(X) = X^5 + 6X^4 + 10X^3 - 20X^2 - 51X - 26.$$

1. *Vérifier que* -1 *et* 2 *sont racines de* P.
2. *Quels en sont les ordres de multiplicités ?*
3. *Déterminer alors une factorisation de* P *dans* $\mathbb{R}[X]$.
4. P *est-il scindé sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 3.3. *On considère dans* $\mathbb{R}[X]$ *le polynôme :*

$$P(X) = X^6 - X^5 - 7X^4 + 9X^3 + 10X^2 - 20X + 8.$$

1. *Chercher trois racines réelles "évidentes".*
2. *Quels en sont les ordres de multiplicités ?*
3. *Déterminer alors une factorisation de* P *dans* $\mathbb{R}[X]$.
4. P *est-il scindé sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 3.4.
1. *Le polynôme* $P(X) = 2X^4 - 10X^2 + 8$ *est-il scindé sur* $\mathbb{R}$ *?*
2. *Le polynôme* $Q(X) = 2X^4 + 2X^3 - 2X - 2$ *est-il scindé sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 3.5. *Montrer que* 1 *est racine du polynôme* $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et déterminer son ordre.*

Exercice 3.6. *Montrer que le polynôme* $X^{n+2} - X + 1$ *n'admet que des racines simples pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

4 Décomposition en facteurs irréductibles

Exercice 4.1.
1. *Décomposer le polynôme* $P(X) = X^3 - X^2 + 2iX - 2i$ *en produit de facteurs irréductibles dans* $\mathbb{C}[X]$.
2. *Décomposer le polynôme* $P(X) = X^4 - 1$ *en produit de facteurs irréductibles dans* $\mathbb{C}[X]$ *et dans* $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4.2.
1. *Montrer que* i *est une racine complexe du polynôme*

$$P(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$$

2. *En déduire une factorisation de* $P(X)$ *en produit de facteurs irréductibles dans* $\mathbb{R}[X]$.