Exercices Chap.24 : Vocabulaire des ensembles et des applications

1 Généralités

Exercice 1.1. *Écrire en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :*

$$A = \left\{\text{nombres entiers compris entre } \sqrt{2} \text{ et } 2\pi.\right\}.$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{C};\ \exists (n,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ x = \frac{p}{n} \text{ et } 1 \leq p \leq 2n \leq 7.\right\}.$$

Exercice 1.2. *Ensemble des parties.*
Écrire l'ensemble des parties de $E = \{a, b, c, d\}$.

Exercice 1.3.
1. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, *et soit* $A = [-1, 4]$.
   Déterminer :
   (a) *l'image directe de* A *par* f *;*
   (b) *l'image réciproque de* A *par* f.
2. *On considère la fonction* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Quelle est l'image directe, par $\sin$, *de* $\mathbb{R}$ *? De* $[0, 2\pi]$ *? de* $[0, \pi/2]$ *?*
   Quelle est l'image réciproque, par $\sin$, *de* $[0, 1]$ *? de* $[3, 4]$ *? de* $[1, 2]$ *?*

Exercice 1.4. *Composition non commutative*

1. *Soient* f *et* g *les deux fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définies par*

$$f(x) = 3x + 1 \text{ et } g(x) = x^2 - 1.$$

   Calculer $f \circ g$ *et* $g \circ f$.
2. *Dans les exemples suivants, déterminer deux fonctions* u *et* v *telles que* $h = u \circ v$ *:*

$$h_1(x) = \sqrt{3x-1} \quad h_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad h_3(x) = \frac{1}{x+7}.$$

Exercice 1.5. *Deux descriptions d'un même ensemble*

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 4x - y = 1\}$ *et* $B = \{(t + 1, 4t + 3);\ t \in \mathbb{R}\}$. *Démontrer que* $A = B$.

Exercice 1.6. *Composition itérée*

Soit $f(x) = \frac{x}{x+1}$. *Déterminer* $f \circ f \circ \cdots \circ f(x)$ *(où le symbole* f *apparaît* n *fois) en fonction de* $n \in \mathbb{N}^*$ *et de* $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.7. *Ensembles et images directes*

Soient E *et* F *deux ensembles et soit* $f : E \to F$. *Soient également* A *et* B *deux parties de* E.

1. *Démontrer que* $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$. *La réciproque est-elle vraie ?*
2. *Démontrer que* $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. *L'inclusion réciproque est-elle vraie ?*
3. *Démontrer que* $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 1.8. *Ensembles et images réciproques*

Soient E *et* F *deux ensembles et soit* $f : E \to F$. *Soient également* A *et* B *deux parties de* F.

1. *Démontrer que* $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. *La réciproque est-elle vraie ?*
2. *Démontrer que* $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
3. *Démontrer que* $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

2 Injection, surjection, bijection

Exercice 2.1. *Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?*

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$.
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1$.
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$

Exercice 2.2. *Composition et injectivité*

Soient f *et* g *les applications de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *définies par* $f(x) = 2x$ *et*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

1. *Déterminer* $g \circ f$ *et* $f \circ g$.
2. f *et* g *sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?*

Exercice 2.3. *Calcul de la réciproque*

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *définie par*

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$

est bijective. Calculer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 2.4. *Avec des nombres complexes*

Démontrer que l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{-3\} & \to & \mathbb{C}\backslash\{i\} \\ z & \mapsto & \frac{iz-i}{z+3} \end{array}$ *est une bijection. Déterminer sa bijection réciproque.*

Exercice 2.5. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. f *est-elle injective ? surjective ?*
2. *Montrer que* $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. *Montrer que la restriction* $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $g(x) = f(x)$ *est une bijection.*

Exercice 2.6. *Soit* $f : [1; +\infty[\to [1; +\infty[$ *définie par* $f(x) = e^{ln^2(x)}$. *Démontrer que* f *réalise une bijection de* $[1; +\infty[$ *sur* $[1; +\infty[$ *et expliciter l'application réciproque.*

Exercice 2.7. *Composition, injectivité et surjectivité*

On considère 4 ensembles A, B, C *et* D, *et des applications* $f : A \to B$, $g : B \to C$ *et* $h : C \to D$.
Montrer que :

1. $g \circ f$ *injective* $\implies$ f *injective,*
2. $g \circ f$ *surjective* $\implies$ g *surjective.*