

Exercices Chap.3 : Fonctions polynômiales de degré 2 ou 3

1 Fonctions polynomiales du second degré

Exercice 1.1. Soit $f(x) = -8x^2 + 2x + 3$ dont on note \mathcal{C}_f la courbe représentative.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 3$. En déduire les coordonnées du sommet de la parabole \mathcal{C}_f .
2. Dresser le tableau de variation de f .
3. Écrire $f(x)$ sous forme canonique.
4. Donner la forme factorisée de $f(x)$.

Exercice 1.2. Existe-t-il une fonction polynomiale du second degré telle que $f(0) = 1, f(1) = 0$ et $f(-1) = 1$? Si c'est le cas, la déterminer.

Exercice 1.3. En utilisant le changement de variable $X = x^2$, résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

1. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
2. $-2x^4 + x^2 + 1 = 0$

Exercice 1.4. Déterminer, selon la valeur du nombre réel m , le nombre de solutions des équations suivantes :

1. $2x^2 - mx - m^2 = 0$
2. $mx^2 + 2(2m + 1)x + 1 = 0$

2 Factorisation de fonctions polynomiales

Exercice 2.1. On s'intéresse à l'équation (E) : $3x^3 + x^2 - 5x + 1 = 0$.

1. Conjecturer graphiquement le nombre de solutions de l'équation.
2. Prouver que 1 est une solution de l'équation.
3. Trouver des réels a, b et c tels que

$$3x^3 + x^2 - 5x + 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

4. En déduire les solutions de (E).

Exercice 2.2. Factoriser dans \mathbb{R} les fonctions polynomiales suivantes :

1. $f_1(x) = -6x^3 + 17x^2 - 14x + 3$
2. $f_2(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 3$
3. $f_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$

3 Fonctions rationnelles

Exercice 3.1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\frac{2x^2-3x+1}{2x-1} = 2$
2. $\frac{-x+2}{x^2+x-12} = -4$
3. $\frac{x+3}{x-1} = \frac{2x-3}{x-2}$

Exercice 3.2. Déterminer réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1; 2\}$:

$$\frac{x^2+4x+7}{x^2-3x+2} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$$

4 Application aux sciences

Exercice 4.1. Pour mesurer la profondeur d'un puits, on y laisse tomber une pierre. Le bruit de contact de la pierre avec le fond du puits est perçu au bout de 6s après le lâcher de la pierre. On notera p la profondeur de ce puits.

1. On appelle t_1 le temps de chute de la pierre. Pendant sa chute, la distance x parcourue par la pierre en fonction du temps t est donnée par $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$ où g est l'accélération de la pesanteur avec $g \approx 9,81m.s^{-1}$. Exprimer p en fonction de t_1 .
2. Pour remonter à la surface, le son met un temps t_2 . La vitesse du son est de $340m.s^{-1}$. Exprimer p en fonction de t_2 .
3. Quelle relation existe-t-il entre t_1 et t_2 ?
4. Montrer alors que t_1 vérifie l'équation $4,9t_1^2 + 340t_1 - 2040 = 0$.
5. Quelle est alors la profondeur du puits ?