

Exercices

Chap.5 : Calcul de limite en un point ou à l'infini

1 Fonctions polynomiales et rationnelles

Exercice 1.1. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions f suivantes :

$$1. f(x) = -x^3 + 2x - 4$$

$$3. f(x) = 4x^3 + x^2 - 5x$$

$$2. f(x) = -2x^4 - 5x + 3x - 1$$

$$4. f(x) = x^5 - 3x^3$$

Exercice 1.2. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions f suivantes :

$$1. f(x) = \frac{-3x^2 - 5x + 2}{x^3 - 3x + 1}$$

$$3. f(x) = \frac{3x^3 - 6x^2 + 2}{-2x^3 - 2x + 4}$$

$$2. f(x) = \frac{4x^3 - 5x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$4. f(x) = \frac{3x^3 - 6x^2 + 2}{-3x^2 - x + 2}$$

2 Opérations sur les limites

Exercice 2.1. Soit la fonction f définie sur $I =]-2; 2[$ par $f(x) = \frac{x+3}{(x+2)(x-2)}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Exercice 2.2. Déterminer les limites en $\frac{1}{3}$ et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $I =]\frac{1}{3}; +\infty[$ par :

$$1. f(x) = \frac{x+1}{3x-1}$$

$$3. f(x) = \frac{x^2+1}{3x-1}$$

$$2. f(x) = \frac{1}{3x-1}$$

Exercice 2.3. Déterminer les limites aux bornes de I pour les fonctions suivantes :

$$1. f(x) = \ln(-2x + 1) \text{ où } I =]-\infty; \frac{1}{2}[$$

$$2. f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) \text{ où } I =]1; +\infty[$$

$$3. f(x) = \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \text{ où } I =]0; +\infty[$$

$$4. f(x) = e^{\frac{2x+1}{x-1}} \text{ où } I =]1; +\infty[$$

$$5. f(x) = e^{-x^4 + \frac{1}{x}} \text{ où } I =]0; +\infty[$$

3 Taux d'accroissements

Exercice 3.1. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2}-1}{x}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+1)e^x-1}{x}$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

4 Croissances comparées et autres...

Exercice 4.1. Déterminer les limites aux bornes de I pour les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+2}$ avec $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = -x + \frac{3}{x} + \ln(x)$ avec $I = \mathbb{R}^{+*}$
3. $f(x) = \frac{e^{-x}-2}{3e^{-x}+1}$ avec $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = (x-2)e^{-x}$ avec $I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = 3x^2 + 2 - \ln(x)$ avec $I = \mathbb{R}^{+*}$
6. $f(x) = (1-x)e^x + (x-2)e^{-x}$ avec $I = \mathbb{R}$

Exercice 4.2. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x-1}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x + 3)e^x$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{3x^2-1}{2x^2+x-1}\right)$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-e^x}{2x^2+4x-1}$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x)}{x+1}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln(x)}{x-1}$

Exercice 4.3. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 3x^2 - 3$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x\sqrt{x}(e^{-x})^3$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-\ln(x)}{\ln(x)-x}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - x^2$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-4}{e^x+x}$
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{x^2}$
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \ln(x)$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) - 3x + 2$
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}$

Exercice 4.4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln(x)$.