

Devoir-Maison 4

A rendre le lundi 6 janvier 2025

CORRECTION

Exercice 0.1. On fixe $p \in \mathbb{N}$.

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \binom{n+p}{p} x^n$?

On pose alors, pour tout $x \in]-R; R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n$.

2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$(1-x)y' - (p+1)y = 0.$$

3. En déduire une expression de $f(x)$ pour $x \in]-R; R[$ à l'aide des fonctions usuelles.

1. Pour $z \in \mathbb{C}^*$ fixé, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(n+p)!}{p!n!} |z|^n$.

On a alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1+p)!}{p!(n+1)!} \times \frac{p!n!}{(n+p)!} |z| = \frac{n+1+p}{n+1} |z| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |z|$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |z|$.

D'après le critère de D'Alembert :

- Si $|z| < 1$, la série $\sum u_n$ est convergente, c'est-à-dire la série $\sum \binom{n+p}{p} z^n$ est absolument convergente.
- Si $|z| > 1$, la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente, c'est-à-dire la série $\sum \binom{n+p}{p} z^n$ est grossièrement divergente.

Donc $R = 1$.

2. Par théorème de dérivation terme à terme, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n+p}{p} n x^{n-1}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
(1-x)f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{p!(n-1)!} x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{p!(n-1)!} x^n \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1+p)!}{p!k!} x^k - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{p!(n-1)!} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(n+1+p)!}{p!n!} - \frac{(n+p)!}{p!(n-1)!} \right) x^n + p + 1 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{p!(n-1)!} \left(\frac{n+1+p}{n} - 1 \right) x^n + p + 1 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{p!(n-1)!} \times \frac{p+1}{n} x^n + p + 1 \\
&= (p+1) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{p!n!} x^n + 1 \right) \\
&= (p+1)f(x)
\end{aligned}$$

Ainsi f est bien solution de l'équation différentielle $(1-x)y' - (p+1)y = 0$.

3. f est donc solution du problème de Cauchy suivant : $\begin{cases} (1-x)y' - (p+1)y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Pour résoudre cette équation différentielle, on pose $a(x) = -\frac{p+1}{1-x}$.

Une primitive de a sur $] -1; 1[$ est la fonction A définie par :

$$A(x) = (p+1) \ln(1-x)$$

donc les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$y(x) = K e^{-(p+1) \ln(1-x)} = \frac{K}{(1-x)^{p+1}}.$$

Avec la condition initiale, on obtient $y(x) = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$.

Le problème de Cauchy étant associé à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec $1-x \neq 0$ sur $] -1; 1[$, ce problème de Cauchy admet, sur $] -1; 1[$ une unique solution.

On a donc, pour tout $x \in] -1; 1[$, $f(x) = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$.

Exercice 0.2. Déterminer une solution développable en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle :

$$t^2 y'' + 4ty' + 2y = \ln(1+t)$$

Exprimer cette solution à l'aide des fonctions usuelles.

On cherche donc y sous la forme $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ (série de rayon de

convergence R).

On a alors pour tout $t \in] -R; R[$:

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \text{ et } y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

Donc y est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, pour tout $t \in]-R; R[\cap]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 4n a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n \\ \Leftrightarrow & \sum_{n=2}^{+\infty} (n(n-1) a_n + 4n a_n + 2a_n) t^n + 4a_1 t + 2a_0 + 2a_1 t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a_0 = 0 \\ 6a_1 = 1 \\ \forall n \geq 2, \quad (n^2 + 3n + 2) a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1, \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } y(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)} t^n.$$

Le rayon de convergence de cette série est égal à 1 .

En utilisation la décomposition $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$, on obtient, pour $t \neq 0$:

$$y(t) = \frac{(t+1)^2}{2t^2} \ln(1+t) - \frac{1}{2t} - \frac{3}{4}$$

et $y(0) = 0$.