Chap.42 : Espaces probabilisés finis

1 Expérience aléatoire, univers et événements

1.1 Expérience aléatoire

Définition 1.1. *On appelle* ***expérience aléatoire*** *une expérience :*

- *dont le résultat est soumis au hasard*
- *dont tous les résultats possibles sont connus*
- *reproductible à l'identique*

Exemple 1.2.

1. *On lance une pièce de monnaie en l'air puis on observe la face visible lorsqu'elle tombe.*
2. *On lance un dé à six faces et on observe le numéro obtenu sur la face visible.*
3. *On compte le nombre de fois qu'il faut lancer un dé pour obtenir un 6 pour la première fois.*

Définition 1.3. *On appelle* ***issue*** *de l'expérience aléatoire un des résultats possibles de cette expérience aléatoire. On appelle* ***univers*** *associé à une expérience aléatoire l'ensemble des issues de cette expérience aléatoire. On le note généralement Ω.*

Application 1.4. *Déterminer les univers respectifs des différentes expériences aléatoires décrites dans l'exemple précédent.*

1.2 Événement

Définition 1.5. *On considère une expérience aléatoire d'univers Ω.*
Un ***événement*** *associé à cet expérience aléatoire est un sous ensemble (ou partie) de Ω.*
L'ensemble des événements est donc $\mathscr{P}(\Omega)$ (ensemble des parties de Ω).

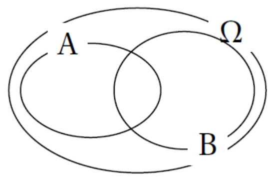
Exemple 1.6. *Dans l'exemple du lancer de dé, l'événement $A = \{1; 3; 5\}$ est un événement lié à l'expérience aléatoire. On peut aussi définir l'événement A comme « le résultat du lancer est un nombre impair ».*

Définition 1.7. *A l'issue de l'expérience aléatoire, on dira que l'événement A est réalisé si l'issue ω de l'expérience est un élément de A. On dit aussi que ω est une* ***issue favorable*** *à A.*
*Ω est l'****événement certain****, ; $\emptyset$ est l'événement impossible.*
Un événement de la forme $\{\omega\}$ (ne comportant qu'une seule issue) est appelé un ***événement élémentaire****.*

Exemple 1.8. *L'issue 1 est une issue favorable à l'événement $A = \{1;3;5\}$. L'événement 1 est un événement élémentaire.*

Définition 1.9.

- *L'événement A* ***OU*** *B est l'événement $A \cup B$ constitué de toutes les issues favorables à A ou à B.*



- *L'événement A* ***ET*** *B est l'événement $A \cap B$ constitué de toutes les issues favorables à A et à B.*
- *L'événement $\overline{\boldsymbol{A}}$, appelé* ***événement contraire*** *de A est constitué de toutes les issues qui ne sont pas favorables à A.*

Exemple 1.10. *Dans l'exemple du lancer de dé, l'événement contraire de l'événement $A = \{1;3;5\}$ est :*

Définition 1.11. *Deux événements $(A, B) \in (\mathscr{P}(\Omega))^2$ sont dits* ***incompatibles*** *lorsque $A \cap B = \emptyset$.*

Application 1.12. *On joue à la bataille navale sur un échiquier carré de 10 par 10, les lignes étant numérotées de 1 à 10 et les colonnes de A à J. On choisit une case au hasard de l'échiquier que l'on annonce ensuite à son adversaire en suivant le protocole suivant : on lance un premier dé dont les faces sont numérotées de 1 à 10 (A = 1, B = 2, etc.), ce dernier donnant la référence de la colonne, puis on relance ce même dé pour obtenir le numéro de la ligne.*
On considère les événements suivants :

- E_1 : *« notre tir porte sur une case des 3 premières colonnes » ;*
- E_2 : *« notre tir porte sur une case des 5 dernières lignes »*
- E_3 : *« notre tir porte sur une case de la ligne 5 » ;*
- E_4 : *« notre tir porte sur la case A2 ».*

Décrire les événements E_1, E_2, E_3 *et* E_4.

Application 1.13. 1. *On choisit au hasard un lettre de l'alphabet et on considère les deux événements :*

- C : *« on obtient une consonne » ;*
- V : *« on obtient une voyelle ».*

Sont-ils incompatibles ?

2. *On choisit un nombre au hasard entre 1 et 10, et on considère les deux événements :*

- P : *« on obtient un nombre pair » ;*
- R : *« on obtient un nombre premier ».*

Sont-ils incompatibles ?

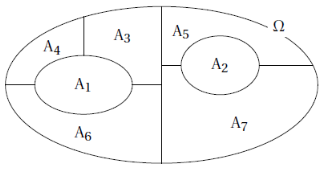
Définition 1.14. *Soit* $(A_1, ..., A_r)$ *une famille d'événements.*
On dit que cette famille est un ***système complet d'événements*** *(S.C.E.) lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- *les événements sont deux à deux incompatibles :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,r]\!], i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \,;$$

- *l'union de tous les événements est* Ω *:*

$$\bigcup_{i=1}^{r} A_i = \Omega$$



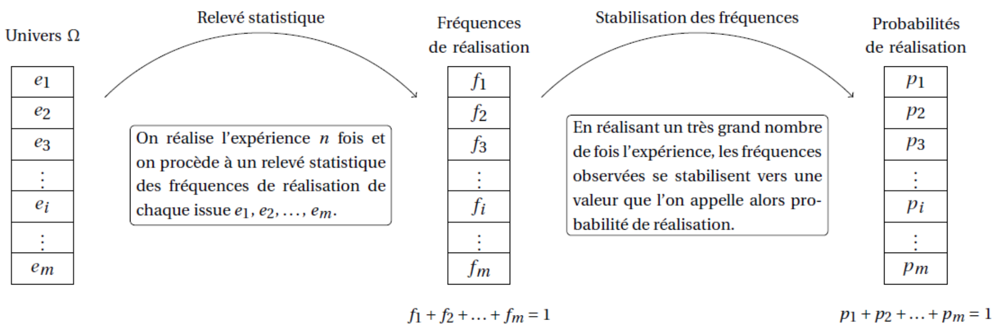
Remarque 1.15.

- *Si A est un événement alors $\left\{A, \overline{A}\right\}$ est un système complet d'événements.*
- *L'ensemble des événements élémentaires constituant un univers fini constitue un S.C.E.*
  Si $\Omega = \{e_1, ..., e_m\}$ alors $(\{e_1\}, \{e_2\}, ..., \{e_m\})$ est un S.C.E.

Application 1.16. *Dans l'exemple du lancer de dé, $\{\{1\}; \{2; 4\}; \{3; 5; 6\}\}$ est un S.C.E. Trouver un autre S.C.E.*

2 Probabilités sur un univers fini

Remarque 2.1. *Des fréquences aux probabilités.*
On considère une expérience aléatoire pouvant conduire à plusieurs issues ou éventualités notées $e_1, ..., e_m$.



Définition 2.2. *Soit Ω un ensemble fini non vide. On appelle probabilité sur Ω toute application $p : \mathscr{P}(\Omega) \to [0; 1]$ qui vérifie :*

- $p(\Omega) = 1$

- *Si A et B sont incompatibles alors :*

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

*On dit alors que (Ω, p) est un **espace probabilisé fini**. Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on appelle probabilité de A le nombre $p(A) \in [0; 1]$.*

Proposition 2.3. *Soit A un événement. Sa probabilité est la somme des probabilités des issues élémentaires qui le composent :*

$$p(A) = \sum_{w_i \in A} p(\{w_i\})$$

Exemple 2.4. *Dans un jeu de pile ou face, on peut définir plusieurs probabilités sur Ω :*

- *p_1 telle que $p_1(\{Pile\}) = 0,5$, $p_1(\{Face\}) = 0,5$, $p_1(\Omega) = 1$ et $p_1(\emptyset) = 0$ correspond à une pièce équilibrée.*
- *p_2 telle que $p_2(\{Pile\}) = 0,2$, $p_2(\{Face\}) = 0,8$, $p_2(\Omega) = 1$ et $p_2(\emptyset) = 0$ correspond à une pièce truquée.*
- *p_3 telle que $p_3(\{Pile\}) = 1$, $p_3(\{Face\}) = 0$, $p_3(\Omega) = 1$ et $p_3(\emptyset) = 0$ correspond à une pièce truquée tombant toujours sur Pile.*

Proposition 2.5. *Soit un espace probabilisé (Ω, p) et soient deux événements A et B. Alors :*

- *$p(\emptyset) = 0$.*
- *$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.*
- *Si $A \subset B$ alors $p(A) \leq p(B)$.*
- *$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$*

Remarque 2.6. *Lorsque un événement A est "plus petit" que B, dans le sens où $A \subset B$, alors $p(A) \leq p(B)$. C'est la **croissance de la probabilité**. Attention toutefois : il se peut que $A \subsetneq B$ et que $p(A) = p(B)$ (cela se produit lorsque $p(B \setminus A) = 0$).*

Théorème 2.7. *Soit $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ un univers fini associé à une expérience aléatoire et soit $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements.*
*Si $p_1, p_2, ..., p_n$ sont des nombres réels positifs de somme 1 alors il existe une **unique** probabilité p sur $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que :*

$$\forall i \in [\![1; n]\!], p(\{x_i\}) = p_i$$

Autrement dit, une probabilité sur un univers fini est entièrement déterminée par la connaissance des probabilités des évènements élémentaires.

Application 2.8. *Les faces d'un dé cubique sont numérotées de 1 à 6 et la probabilité d'apparition d'un numéro est donné par le tableau ci-dessous.*

Numéro de la face	1	2	3	4	5	6
Probabilité d'apparition de la face	0,160	0,168	0,179	0,173	0,148	0,172

Quelle est la probabilité lors, d'un lancer de ce dé, d'obtenir :

1. *Un numéro pair ?*
2. *Un numéro impair ?*
3. *Un numéro strictement supérieur à 3 ?*

Application 2.9. *Un dé cubique pipé est tel que la probabilité d'obtenir un 6 est $\frac{1}{4}$, tandis que les cinq autres événements élémentaires correspondant aux faces 1 à 5, ont la même probabilité. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :*

1. *Le dé tombe sur 3.*
2. *Le dé tombe sur un nombre impair.*
3. *Le dé tombe sur un nombre pair.*

3 Équiprobabilité

Définition 3.1. *On dit qu'il y a équiprobabilité sur (Ω, p) lorsque les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales. Si Ω est constitué de n événements élémentaires :*

$$p(\{w_1\}) = p(\{w_2\}) = ... = p(\{w_n\}) = \frac{1}{n}$$

Proposition 3.2. *S'il y a équiprobabilité sur l'univers fini Ω alors tout événement A a une probabilité :*

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Application 3.3. *On lance successivement deux dés équilibrés.*

1. *Quel est l'univers Ω ? Quel est son cardinal ?*
2. *Quelle est la probabilité que la somme des résultats obtenus soit 6 ?*

Application 3.4. *On tire simultanément 3 jetons numérotés indiscernables dans une urne contenant 5 jetons blancs et 10 jetons rouges.*

1. *Quel est l'univers Ω ? Quel est son cardinal ?*
2. *Est-on en situation d'équiprobabilité ?*
3. *Déterminer la probabilité de l'évènement A « le tirage comporte au moins un jeton rouge ».*

Application 3.5.

1. *On lance une pièce de monnaie truquée de sorte qu'il y ait deux fois plus de chances de tomber sur Pile que sur Face. Déterminer l'univers Ω ainsi que les probabilités des événements élémentaires.*
2. *On lance un dé, il y a une chance sur deux que le dé fournisse un 6, les autres faces étant équiprobables. Déterminer la probabilité d'obtenir un 1.*