

## Exercices

### Chap.35 : Développements limités

## 1 Obtention de développements limités

**Exercice 1.1.** Déterminer les développements limités suivants :

1.  $DL_3(0)$  de  $f : x \mapsto \sqrt{1 + \frac{x}{2}}$
2.  $DL_4(0)$  de  $f : x \mapsto \cos(x^2)$
3.  $DL_{10}(0)$  de  $f : x \mapsto \ln(1 - x^5)$
4.  $DL_6(0)$  de  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$
5.  $DL_5(0)$  de  $f : x \mapsto e^{x^3}$
6.  $DL_3(0)$  de  $f : x \mapsto \frac{e^{4x}-1}{x}$
7.  $DL_4(0)$  de  $f : x \mapsto xe^x \ln(1+x)$
8.  $DL_3(0)$  de  $f : x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$
9.  $DL_2(0)$  de  $f : x \mapsto \sqrt[3]{1 + \ln(1+x)}$

**Exercice 1.2.** Déterminer les développements limités suivants :

1.  $DL_3(2)$  de  $f(x) = \ln(x)$
2.  $DL_3(3)$  de  $f(x) = \sqrt{x}$
3.  $DL_4(3)$  de  $f(x) = e^x$

## 2 Recherche de limites

**Exercice 2.1.** Déterminer, si elle existe :  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(e - (1 + \frac{1}{n})^n)$ .

**Exercice 2.2.** Déterminer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - (1+x)}{x^2}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{\cos(x) - 1}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{\tan(x) - x}$

## 3 Études locales de fonctions

**Exercice 3.1.** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction  $f : x \mapsto x^4 - 2x^3 + 1$  au point d'abscisse  $\frac{1}{2}$  et déterminer la position de cette dernière par rapport à cette tangente au voisinage de  $\frac{1}{2}$ .

**Exercice 3.2.** Soit la fonction  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{e^x-1} \end{cases}$ .

1. Montrer que l'on peut prolonger  $f$  par continuité en 0 en une fonction  $\tilde{f}$ .
2. Déterminer l'équation de la tangente  $T_0$  en 0 à la courbe de  $\tilde{f}$ .
3. Déterminer la position relative de la courbe par rapport à  $T_0$  au voisinage de 0.

**Exercice 3.3.** Soit  $f : x \mapsto \ln(x^2 + 2x + 2)$ .

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction  $f$  au point d'abscisse 0 et déterminer la position de cette dernière par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

**Exercice 3.4.** Déterminer les asymptotes éventuelles aux courbes représentatives des fonctions suivantes :

1.  $f : x \mapsto \sqrt{1 + x + x^2}$

2.  $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x - 1}$

**Exercice 3.5.** On considère la fonction  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^2}{x-1} e^{\frac{1}{x}} \end{cases}$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
2. Déterminer le  $DL_2$  de la fonction  $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$  au voisinage de  $+\infty$ . En déduire que l'on a :

$$f(x) = x + 2 + \frac{5}{2x} + o_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \right)$$

3. En déduire que la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote oblique  $(\Delta)$  dont on donnera une équation.
4. Préciser la position relative de  $(\Delta)$  et  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$ .