

## Exercices

### Chap.8 : Courbes paramétrées

## 1 Tracé de courbes

**Exercice 1.1.** Étudier et tracer l'allure de la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 1.2.** On considère la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = 2 \sin(t) - \sin(2t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Réduire au maximum le domaine d'étude de la courbe.
2. Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\begin{cases} x'(t) = -4 \sin(3t/2) \cos(t/2) \\ y'(t) = 4 \sin(3t/2) \sin(t/2) \end{cases}$ .  
En déduire le tableau de variations des fonctions  $x$  et  $y$  sur l'intervalle déterminé à la question 1.
3. (a) La courbe possède-t-elle un ou plusieurs points remarquables ? Si oui, donner la nature des tangentes en ce(s) point(s).  
(b) À l'aide d'un développement limité déterminer l'allure de la courbe au voisinage du point  $M(0)$ .  
(c) Déterminer un vecteur directeur de la tangente au point  $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ . On admet qu'au voisinage de ce point la courbe prend l'allure d'un point de rebroussement de première espèce.
4. Tracer l'allure de la courbe.

**Exercice 1.3.** Étudier et tracer l'allure de la courbe paramétrée définie par :

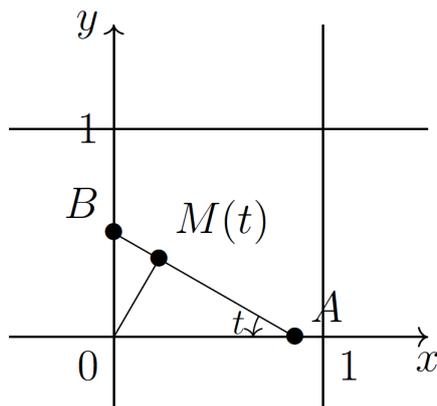
$$\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On étudiera la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage du ou des point(s) singulier(s).

**Exercice 1.4.** Étudier et tracer l'allure de la courbe définie par le paramétrage :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}.$$

**Exercice 1.5.** On se place dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  orthonormé du plan. On considère un point  $A$  de l'axe  $(Ox)$  et un point  $B$  de l'axe  $(Oy)$  tels que  $AB = 1$ . On note alors  $M$  le projeté orthogonal de  $O$  sur le segment  $[AB]$  et  $\mathcal{F}$  le lieu des points  $M$  lorsque  $A$  et  $B$  se déplacent sur leur axe.



1. On note  $t$  une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{AB}, -\vec{i})$ . Montrer que le point  $M$  a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = \sin^2(t) \cos(t) \\ y(t) = \cos^2(t) \sin(t) \end{cases} .$$

2. Faire l'étude complète de la courbe  $\mathcal{F}$  puis la tracer.

## 2 Autour des tangentes

**Exercice 2.1.** On reprend la courbe  $\Gamma$  étudiée dans le cours dont un paramétrage est  $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$ .

1. Pour  $t \in ]0; \frac{\pi}{4}]$ , déterminer une équation cartésienne de la tangente  $D_t$  à  $\Gamma$  au point de paramètre  $t$ .
2. Déterminer, pour  $t \neq 0$ , les deux points d'intersection de  $D_t$  avec les axes de coordonnées, puis calculer la longueur du segment obtenu.

**Exercice 2.2.** On considère la courbe  $\Gamma$  définie par  $\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ .

Déterminer et tracer sur votre calculatrice, l'ensemble  $\Gamma'$  des points du plan par lesquels passent deux tangentes à la courbe  $\Gamma$  perpendiculaires entre elles. (On l'appelle la courbe orthoptique de  $\Gamma$ .)

### 3 Longueur d'un arc paramétré

**Exercice 3.1.** Calculer la longueur de la courbe de l'exercice 1.2.

**Exercice 3.2.** 1. Étudier et tracer l'allure de la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2(t) + \ln(\sin(t)) \\ y(t) = \sin(t) \cos(t) \end{cases}, t \in ]0; \pi[$$

L'étude de la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage des points singuliers n'est pas demandée ici.

On déterminera juste un vecteur directeur de la tangente aux points singuliers.

2. Calculer la longueur de la courbe entre les deux points singuliers.

Après avoir simplifié le plus possible  $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ , il sera judicieux d'envisager le changement de variable  $u = \cos(t)$ .

### 4 Un exemple dans l'espace

**Exercice 4.1.** On considère la courbe de l'espace  $\Gamma$  définie par :

$$\begin{cases} x(t) = (1 + \cos(t)) \cos(t) \\ y(t) = (1 + \cos(t)) \sin(t) \\ z(t) = 4 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}, t \in \mathbb{R} .$$

1. Quels sont les points réguliers de cette courbe ? En ces points, déterminer le vecteur tangent unitaire.
2. Montrer que la tangente à  $\Gamma$  en tous les points réguliers fait un angle constant avec l'axe  $(Oz)$ .
3. Calculer la longueur de  $\Gamma$ .