Exercices
Chap.10 : Équations différentielles scalaires

1 Ordre 1

Exercice 1.1. 1. *Résoudre sur* $]0;+\infty[$ *l'équation différentielle suivante :*

$$2ty' + y = \frac{1}{t}.$$

2. *Résoudre sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *l'équation différentielle suivante :*

$$ty' - 2y = t^3.$$

3. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle suivante :*

$$y' - 2xy = -(2x-1)e^x.$$

Exercice 1.2. 1. *Déterminer les fonctions à valeurs complexes solutions de l'équation différentielle :*

$$y' - 2y = \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t}.$$

2. *Déterminer les fonctions à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle :*

$$y' - 2y = \cos(2t)\mathrm{e}^t.$$

Indication : *penser à utiliser la question* 1.

Exercice 1.3. *On s'intéresse dans cet exercice à l'équation différentielle :*

$$\left(1-x^2\right)y' + xy = 0$$

1. *Résoudre cette équation sur l'intervalle* $]-1;1[$.
2. *Quelles sont les solutions de* (E) *sur* $]-\infty;-1[$ *et sur* $]1;+\infty[$?
3. *Existe-t-il des solutions de* (E) *sur* $\mathbb{R}$ *?*

2 Ordre 2 à coefficients constants

Exercice 2.1. *1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 4y' + 3y = \mathrm{e}^t.$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 3y = \cos(2t).$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 3y = e^t + \cos(2t).$$

Exercice 2.2. *k étant un nombre réel fixé, on cherche, sur $\mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle :*

$$(\mathscr{E}_k) : y'' - 2ky' + \left(k^2 + 1\right) y = \sin t + t\mathrm{e}^{kt}.$$

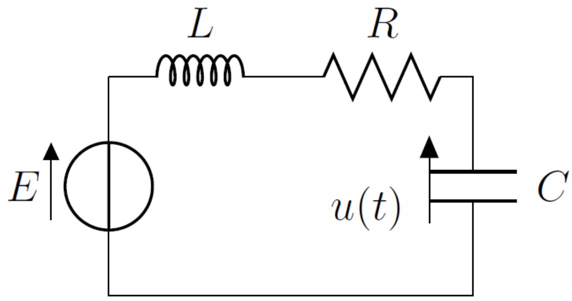
On appelle $(\mathscr{F}_k)$ et $(\mathscr{G}_k)$ les équations différentielles :

$$(\mathscr{F}_k) : y'' - 2ky' + \left(k^2 + 1\right) y = \sin t$$
$$(\mathscr{G}_k) : y'' - 2ky' + \left(k^2 + 1\right) y = t\mathrm{e}^{kt}.$$

1. *Résoudre l'équation homogène $(\mathscr{H}_k)$ associée à l'équation $(\mathscr{E}_k)$.*
2. *On suppose dans cette question que $k = 0$.*
   (a) *Déterminer une solution particulière y_1 de l'équation différentielle $(\mathscr{F}_0)$.*
   (b) *Déterminer une solution particulière y_2 de l'équation différentielle $(\mathscr{G}_0)$.*
3. *On suppose dans cette question que $k \neq 0$.*
   (a) *Déterminer une solution particulière y_1 de l'équation différentielle $(\mathscr{F}_k)$.*
   (b) *Déterminer une solution particulière y_2 de l'équation $(\mathscr{G}_k)$ sous la forme $y_2(t) = (at + b)\mathrm{e}^{kt}$.*
4. *En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E}_k)$ suivant les valeurs de k.*

Exercice 2.3. *La tension u du condensateur d'un circuit RLC est une fonction du temps vérifiant l'équation différentielle*

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = E$$



1. *Déterminer une solution particulière* u_0 *de cette équation.*
2. *On donne* $R = 10\Omega, L = 0,1H, C = 5.10^{-6}F$ *et* $E = 12V$*. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.*
3. *Déterminer l'unique solution vérifiant les conditions initiales usuelles* $u(0) = 0$ *et* $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ *et tracer cette fonction à l'aide de votre calculatrice.*

3 Ordre 2

Exercice 3.1. *On souhaite résoudre sur* $I =]-1; +\infty[$ *l'équation différentielle suivante :*

$$(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = x\mathrm{e}^x$$

1. *Trouver une solution particulière de l'équation homogène associée à* (E) *sous la forme* $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ *avec* $a \in \mathbb{R}$ *à déterminer.*
2. *À l'aide de la méthode de Lagrange résoudre l'équation* (E) *sur* I*.*

Exercice 3.2. *On considère l'équation différentielle :*

$$(E) : x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0, \quad x > 0$$

1. *Soit* z *une application deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$*.*
   On pose $\forall x \in]0, +\infty[, y(x) = z(\ln x)$*.*
   Montrer que y *est solution de* (E) *sur* $]0, +\infty[$si*, et seulement si, l'application* z *est solution sur* $\mathbb{R}$ *d'une équation différentielle à préciser que l'on notera* (H)*.*
2. *Résoudre* (H)*.*
   En déduire l'ensemble des solutions de (E)*.*
3. *Déterminer l'unique solution du système suivant :* $\begin{cases} (E) \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$.

4 Pour aller plus loin...

Exercice 4.1. *Trouver les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0, telles que :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x).$$

Exercice 4.2. *On propose de résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle :*

$$(\mathscr{E}) : y'' + \frac{1}{2x^2} y = 0.$$

1. *Soit y une fonction solution du problème. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$:*

$$z(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right) \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}.$$

   (a) *Exprimer $y(x)$ en fonction de $z(\ln(x))$ pour $x > 0$.*

   (b) *En déduire que la fonction $t \mapsto z(t)$ vérifie sur $\mathbb{R}$ une équation $(\mathscr{E}')$ d'ordre 2 à coefficients constants.*

   (c) *Résoudre $(\mathscr{E}')$.*

2. *Résoudre l'équation $(\mathscr{E})$.*

Exercice 4.3. *: L'équation différentielle*

$$(E) : |t| y' + (t - 1) y = t^3$$

admet-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$?
Indication : *on pourra d'abord la résoudre sur des intervalles où l'on peut la mettre sous "forme résolue", c'est-à-dire sous la forme :*

$$y' + a(t) y = b(t).$$