Exercices
Chap.44 : Variables aléatoires réelles sur un univers fini

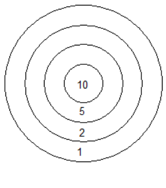
Exercice 0.1. *Un dé décaédrique comporte 10 faces numérotées de 1 àà 10. Un jeu consiste à lancer ce dé, supposé équilibré, et à noter le numéro de la face sur laquelle le dé se stabilise. Le joueur, qui doit miser 3 euros pour lancer le dé, reçoit une somme en euros égale au nombre de diviseurs du nombre entier obtenu.*
On désigne par X la variable aléatoire qui associe à un lancer la gain du joueur (sans tenir compte de la mise).
Par exemple : $X(4) = 3$ car 4 admet 3 diviseurs : 1 ;2 et 4.

1. *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.*
2. *Calculer la probabilité des événements suivants :*
   (a) *A :" le joueur récupère sa mise, mais pas plus"*
   (b) *B : "le gain du joueur ne couvre pas sa mise"*
   (c) *C : "à l'issue du jeu, le joueur n'a pas perdu d'argent"*
3. *Déterminer $E(X)$ et $V(X)$*
4. *Soit S le gain algébrique du joueur (gain -mise). Déterminer $E(S)$ et $V(S)$.*

Exercice 0.2. *Un joueur lance deux fois une pièce supposée équilibrée ; il gagne 2 euros par FACE obtenu et perd 1 euro par PILE obtenu.*
On note X la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur.

1. *Donner la loi de probabilité de X.*
2. (a) *Calculer l'espérance $E(X)$.*
   (b) *Interpréter $E(X)$. ce jeu est-il favorable ou défavorable au joueur ?*
3. *Quelle mise d'entrée à ce jeu l'organisateur pourrait-il mettre en place pour que ce jeu soit équitable ?*
4. *Calculer l'écart-type de X. Que mesure-t-il ?*

Exercice 0.3. *Un joueur lance des fléchettes sur une cible circulaire formée de 4 régions marquées 1, 2, 5 et 10. Nous admettons que la probabilité que le joueur atteigne la cible est de 0,6 et que la probabilité d'atteindre la région i est inversement proportionnelle à i.*



1. *Calculer la probabilité d'atteindre la région i pour* $i = 1, 2, 5, 10$.
2. *Si le joueur atteint la région i, il marque i points et 0 point s'il n'atteint pas la cible. Soit la variable aléatoire* X *"nombre de points marqués lors d'un lancer". Calculer l'espérance mathématique de* X.
3. *Le joueur lance deux flèches de suite, les lancers étant indépendants. Soit* Y *la variable aléatoire " Somme des points marqués lors des deux lancers". Calculer l'espérance mathématique de* Y.
4. *Le joueur lance trois flèches de suite. Quelle est la probabilité qu'il marque au moins 25 points ?*

Exercice 0.4. *Une entreprise de location de voitures relève dans sa comptabilité les frais de réparation des pannes d'origine mécanique et ceux de remise en état de la carrosserie. Elle a observé que, pour une voiture louée une semaine :*

- *la probabilité de panne mécanique est 0,32*
- *la probabilité de dégâts à la carrosserie est 0,54.*

D'autre part la probabilité pour qu'une voiture ayant une panne mécanique présente également des dégâts à la carrosserie est de 0,45.

1. *Calculer les probabilités pour qu'une voiture :*
   (a) *ait une panne mécanique et présente des dégâts à la carrosserie ;*
   (b) *ait seulement une panne mécanique ;*
   (c) *présente seulement des dégâts à la carrosserie ;*
   (d) *n'ait ni panne mécanique, ni dégâts à la carrosserie.*
2. *Calculer la probabilité pour qu'une voiture louée pendant les cinquante deux semaines d'une année n'ait ni panne mécanique, ni dégâts à la carrosserie pendant exactement vingt six semaines.*
3. *Pour une voiture louée une semaine, les frais s'élèvent en moyenne à :*
   - *300 euros en cas de panne mécanique,*
   - *500 euros en cas de dégâts à la carrosserie.*

   Soit X *la variable aléatoire qui prend pour valeur le montant moyen en euros des frais hebdomadaires pour une voiture.*

   (a) *Donner la loi de probabilité de* X.
   (b) *Calculer l'espérance et la variance de* X.

Exercice 0.5. *Un robot se déplace sur un axe gradué. Il est situé à l'origine de cet axe et, à chaque étape, il se déplace d'une unité dans un sens ou dans l'autre de façon équiprobable.*
Par exemple, en une étape, il peut passer de l'abscisse 0 à l'abscisse $+1$ *ou bien à l'abscisse* -1.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X_n l'abscisse occupée par la robot après n étapes. L'objet de cet exercice est d'étudier X_n et d'évaluer la probabilité que le robot se retrouve à sa position d'origine à la fin de l'expérience.

1. *Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 2$.*
   (a) *Quelles sont les valeurs prises par X_2 ?*
   (b) *Soit Y_2 le nombre de déplacements positifs effectués par le robot en deux déplacements. Quelles est la loi de Y_2 ?*
   (c) *Quelle est la probabilité que le robot soit revenu à sa position initiale après 2 étapes ?*
2. *Calculer la probabilité que le robot soit revenu à sa position initiale après 3 étapes.*
3. *Cas général :*
   (a) *Soit Y_n le nombre de déplacements positifs effectués par le robot en n déplacements. Quelle est la loi de Y_n ?*
   (b) *Exprimer X_n en fonction de Y_n.*
   (c) *Quelle est la probabilité que le robot soit revenu à sa position initiale après n étapes ?*

Exercice 0.6. *D'après CCP 2015, filière TPC.*
Le gala annuel d'une école d'ingénieurs est organisé dans un château. A l'arrivée, chaque participant devra déposer ses affaires dans l'un des trois vestiaires.
On appelle les vestiaires V_1, V_2 et V_3. Chaque participant choisit son vestiaire de manière aléatoire et équiprobable, indépendamment du choix des autres participants.
On suppose qu'il y a 1800 participants à la soirée.
On considère la variable aléatoire X désignant le nombre de participants choisissant le vestiaire V_1.

1. *Déterminer la loi de la variable aléatoire X.*
2. *Quelles valeurs la variable aléatoire X peut-elle prendre ?*
3. *Déterminer la probabilité qu'aucun participant ne choisisse V_1.*
4. *Déterminer la probabilité que tous les participants choisissent V_1.*
5. *Déterminer l'espérance et l'écart-type de X.*
6. *On dispose de 800 cintres dans le vestiaire V_1. Prouver que la probabilité qu'il soit nécessaire d'aller en chercher d'autres pendant la soirée est inférieure à 1 % (on pourra s'aider de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev).*

Exercice 0.7. 1. *Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ et soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que*

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

2. ***Application :*** *On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers à effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de 1/6 d'au plus 1/100 ?*