Chap.2 : Droites et cercles dans le plan

1 Droites du plan

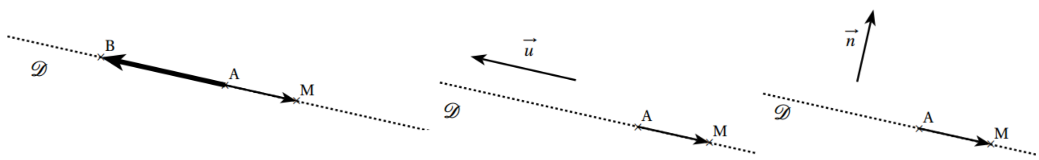
Dans la suite, on utilisera les propriétés du produit scalaire et du déterminant mises en évidence dans les sections précédentes :

$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux} \iff \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$$
$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires} \iff [\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}] = 0$$

1.1 Equations cartésiennes de droite

Rappelons que l'on peut définir géométriquement une droite du plan de plusieurs façons différentes :

1. Par deux points distincts A et B du plan ;
2. Par un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$;
3. Par un point A et un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ (vecteur orthogonal à tout vecteur directeur de la droite).



Définition 1.1. *Soit A un point du plan et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul. La droite $\mathscr{D}$ de **vecteur directeur** $\overrightarrow{u}$ passant par A est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.*
*Si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{u}$, on dit aussi que $\mathscr{D}$ est la droite de **vecteur normal** $\overrightarrow{n}$ passant par A.*

Proposition 1.2. *Soit $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ un repère orthonormé direct du plan. Les coordonnées $(x;y)$ des points d'une droite quelconque $\mathscr{D}$ du plan vérifient une équation de la forme*

$$ax + by + c = 0 \text{ avec } (a,b) \neq (0;0).$$

*Cette équation est appelée **équation cartésienne** de $\mathscr{D}$.*
Réciproquement, si $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(a,b) \neq (0;0)$, alors l'ensemble

$$\{M(x;y), ax + by + c = 0\}$$

est une droite du plan admettant :

1. $\overrightarrow{u}(-b;a)$ *comme vecteur directeur ;*
2. $\overrightarrow{n}(a;b)$ *comme vecteur normal.*

Preuve :

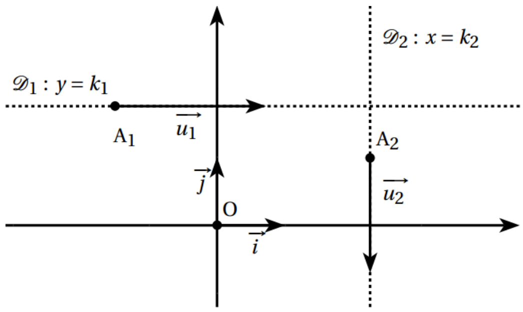
Application 1.3. *Soient* $A(1;4)$ *et* $B(-2;3)$.
1. Donner une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Donner une équation cartésienne de la médiatrice $\mathscr{D}'$ *du segment* $[AB]$.

Application 1.4. *Déterminer une équation cartésienne de la droite passant :*

1. *par* $A(0;1)$ *et dirigée par* $\overrightarrow{u}(3;-2)$ *;*
2. *par* $B(-2;3)$ *et de vecteur normal* $\overrightarrow{u}(1;-2)$ *;*

Remarque 1.5. *Soit* $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ *un repère orthonormé direct du plan. Toute droite dont un vecteur directeur est colinéaire :*

1. *au vecteur* $\overrightarrow{i}$ *admet une équation cartésienne de la forme* $y = k_1$ *avec* $k_1 \in \mathbb{R}$ *;*
2. *au vecteur* $\overrightarrow{j}$ *admet une équation cartésienne de la forme* $x = k_2$ *avec* $k_2 \in \mathbb{R}$.



Application 1.6. *Pour chacune des droites $\mathscr{D}$ données par les équations cartésiennes suivantes, donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ ainsi que les coordonnées d'un point A appartenant à la droite.*

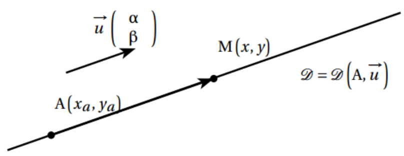
Équation cartésienne de $\mathscr{D}$	$\overrightarrow{n}$ vecteur normal à $\mathscr{D}$	$\overrightarrow{u}$ vecteur directeur de $\mathscr{D}$	$A(x_a, y_a)$ un point de $\mathscr{D}$
$\mathscr{D}: \quad 2x + y - 3 = 0$			
$\mathscr{D}: \quad 2x + 5y + 10 = 0$			
$\mathscr{D}: \quad 2y + 7 = 0$			
$\mathscr{D}: \quad 3x + 2y - 2 = 0$			

1.2 Système d'équations paramétriques de droite

Théorème 1.7. *Soit $A(x_A; y_A)$ et $\overrightarrow{u}(\alpha; \beta)$ un vecteur non nul. La droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels qu'il existe un $t \in \mathbb{R}$ avec :*

$$\begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \end{cases}$$

Une telle écriture est appelée ***système d'équations paramétriques*** *de la droite $\mathscr{D}$.*



Application 1.8. *Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ donnée par l'équation cartésienne $3x - 4y + 10 = 0$, puis donner les coordonnées cartésiennes du point de paramètre -1 de $\mathscr{D}$.*

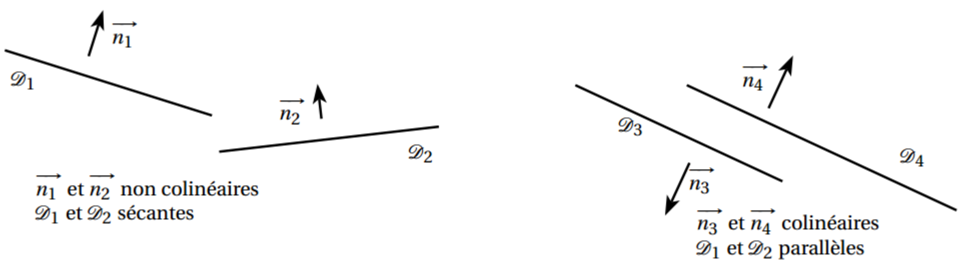
Application 1.9. *Soient A et B les points de coordonnées $(1;-1)$ et $(5;1)$ et $\mathscr{D}$ la droite de système d'équations paramétriques :*

$$\begin{cases} x = 4t+2 \\ y = -t+1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. *Les points $K(10,-1)$ et $L(-2;3)$ appartiennent-ils à la droite $\mathscr{D}$?*
2. *Donner un système d'équations paramétriques de la droite (AB).*
3. *Donner une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$.*

1.3 Intersection de deux droites

Proposition 1.10. *Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles ou confondues si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.*
Dans tous les autres cas, elles sont sécantes en un unique point.



Proposition 1.11. *Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles ou confondues si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.*
Dans tous les autres cas, elles sont sécantes en un unique point.

Application 1.12. *Étudier les positions relatives des deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et déterminer le cas échéant leur point d'intersection.*

1. $\mathscr{D} : -2x + 3y - 4 = 0$ *et* $\mathscr{D}' : -6x + y - 4 = 0$

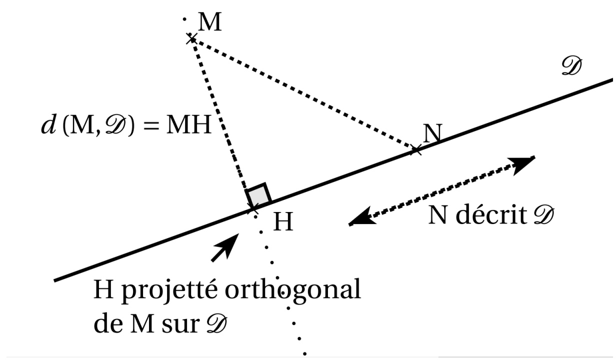
2. $\mathscr{D} : 4x + 3y - 1 = 0$ *et* $\mathscr{D}' : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Application 1.13. *1. Déterminer les valeurs de* α *telles que les droites* $\mathscr{D}$ *d'équation* $\alpha x + 2y - 1 = 0$ *et* $\mathscr{D}'$ *d'équation* $x + \alpha y - 2 = 0$ *sont parallèles. Dans ce cas, sont-elles confondues ?*

2. Déterminer (en fonction de α *) les coordonnées du point d'intersection* I *de* $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$ *pour les autres valeurs de* α *.*

1.4 Distance d'un point à une droite

Définition 1.14. *Soient* M *un point du plan et* $\mathscr{D}$ *une droite du plan. On appelle distance du point* M *à la droite* $\mathscr{D}$*, notée* $d(M, \mathscr{D})$*, la plus petite distance* MN *où le point* N *parcourt la droite* $\mathscr{D}$*.*



Théorème 1.15. *On munit le plan d'un repère orthonormal. Soient $\mathscr{D}$ la droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ et $M_0(x_0;y_0)$. Alors la distance de M_0 à la droite $\mathscr{D}$ vaut :*

$$d(M_0,\mathscr{D}) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Preuve :

Application 1.16. *Calculer la distance du point A à la droite $\mathscr{D}$ dans chacun des cas :*

1. $A(2;-3)$ *et* $\mathscr{D} : 3x-2y+1=0$
2. $A(-3;1)$ *et* $\mathscr{D} : \begin{cases} x = -3+2t \\ y = -2t+2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Application 1.17. *On donne les trois points $A(1;1), B(3;-1)$ et $C(3;1)$. Calculer la distance du point C à la droite (AB).*

Application 1.18. ***Détermination du projeté orthogonal sur une droite dont on connait une équation cartésienne.***
On munit le plan d'un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ et on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x-2y+1=0$ et C le point de coordonnées $(2;-1)$. Déterminer les coordonnées du point C', le projeté orthogonal de C sur $\mathscr{D}$.

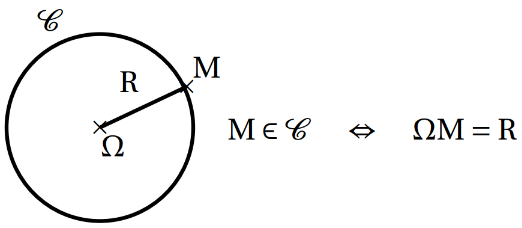
Application 1.19. ***Détermination du projeté orthogonal sur une droite dont on connait un système d'équations paramétriques.***
On munit le plan d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *et on considère la droite* $\mathscr{D}$ *d'équation* $x - 2y + 1 = 0$ *et* C *le point de coordonnées* $(2; -1)$*.*
Déterminer les coordonnées du point C'*, le projeté orthogonal de* C *sur* $\mathscr{D}$*.*

2 Cercles

2.1 Équation cartésienne d'un cercle

Dans ce qui suit, nous munissons le plan d'un repère orthonormal direct.

Définition 2.1. *Soit un point* $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ *et un nombre réel* $R > 0$*. Le* ***cercle*** $\mathscr{C}$ *de centre* Ω *et de rayon* R *est l'ensemble des points* M *tels que* $\Omega M = R$*.On le notera* $\mathscr{C}(\Omega, R)$



Proposition 2.2. *L'ensemble des points* $M(x; y)$ *d'un cercle* $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\Omega, R)$ *vérifie l'équation :*

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

Une telle écriture est appelée ***équation cartésienne*** *du cercle.*
Réciproquement, toute équation de cette forme est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon R .

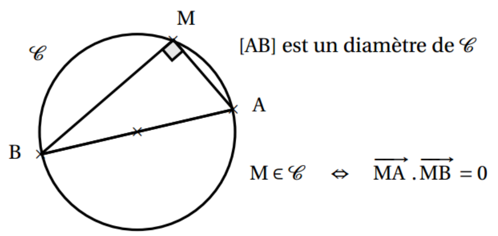
Preuve :

Application 2.3. *Déterminer si les équations ci-dessous sont celles de cercles. Si c'est le cas, identifier le centre et le rayon.*

1. $x^2 + y^2 - x + 4y + 5 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 2x + 3y + 3 = 0$

Application 2.4. *Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega(2; -3)$ et de rayon 4.*
1. Donner une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.
2. Donner une forme développée de cette équation.
3. Parmi les points $A(-1; -6), B(6; -3), C(5; -6)$ et $D(2; 1)$, lesquels appartiennent à $\mathscr{C}$?

Proposition 2.5. *Caractérisation du cercle par le produit scalaire Soient A et B deux points du plan, le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$*



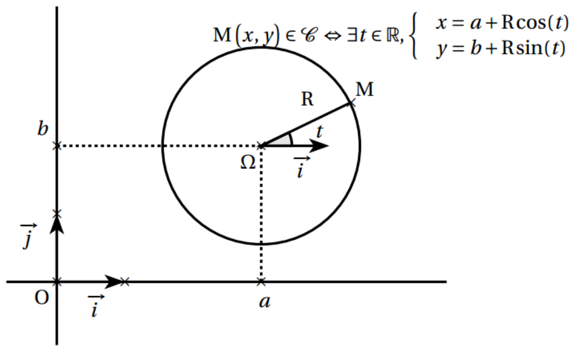
Application 2.6. *On donne $A(2;3)$ et $B(-1;6)$. Écrire une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$.*

2.2 Représentation paramétrique d'un cercle

Proposition 2.7. *Le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels qu'il existe un nombre réel t tel que :*

$$\begin{cases} x = x_\Omega + Rcost \\ y = y_\Omega + Rsint \end{cases}$$

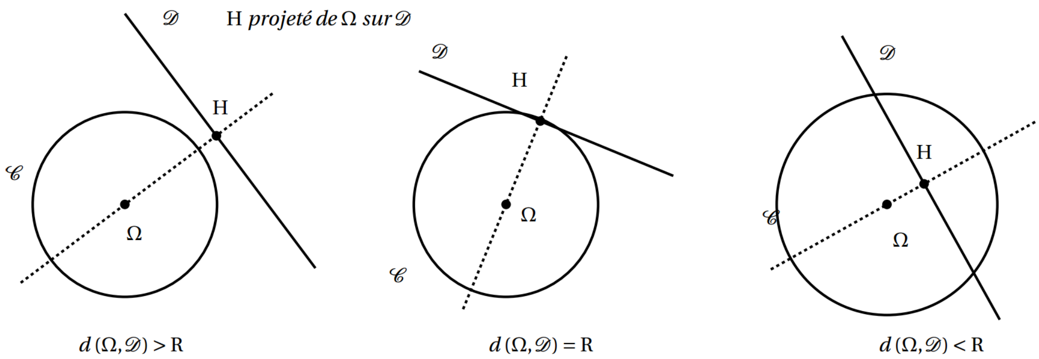
*Une telle écriture est appelée **représentation paramétrique** de ce cercle.*



3 Intersection d'une droite et d'un cercle

Proposition 3.1. *L'intersection d'une droite $\mathscr{D}$ et d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon $R > 0$ est :*

- *L'ensemble vide si $d(\Omega, \mathscr{D}) > R$. On note alors $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = \emptyset$;*
- *Un point unique si $d(\Omega, \mathscr{D}) = R$. On dit alors que la droite est **tangente** au cercle en ce point ;*
- *Deux points distincts si $d(\Omega, \mathscr{D}) < R$.*



Méthode 3.2. *Dans la pratique, on peut avoir à déterminer les éventuels points d'intersection :*

- *de la droite* $\mathscr{D} : ax + by + c = 0$
- *et du cercle* $\mathscr{C} : x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$

Deux méthodes selon la question :

- *si on souhaite seulement connaître le nombre de points d'intersection, on se contente de calculer* $d(\Omega, \mathscr{D})$
- *si on souhaite connaitre les coordonnées des points, on résout le système :* $\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ \mathscr{D} : ax + by + c = 0 \end{cases}$

Application 3.3. *Déterminer les éventuels points d'intersection entre le cercle* $\mathscr{C}$ *d'équation* $\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$ *et :*

1. *L'axe des ordonnées ;*
2. *La droite* $\mathscr{D}$ *d'équation* $\mathscr{D} : x - y + 1 = 0$