Devoir-Maison 4

A rendre le lundi 6 janvier 2025
CORRECTION

Exercice 0.1. *On fixe $p \in \mathbb{N}$.*

1. *Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \begin{pmatrix} n+p \\ p \end{pmatrix} x^n$?*

   On pose alors, pour tout $x \in]-R; R[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} n+p \\ p \end{pmatrix} x^n$.

2. *Montrer que f est solution de l'équation différentielle :*

$$(1-x)y' - (p+1)y = 0.$$

3. *En déduire une expression de $f(x)$ pour $x \in]-R; R[$ à l'aide des fonctions usuelles.*

1. Pour $z \in \mathbb{C}^*$ fixé, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(n+p)!}{p!n!}|z|^n$.
On a alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1+p)!}{p!(n+1)!} \times \frac{p!n!}{(n+p)!}|z| = \frac{n+1+p}{n+1}|z| \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |z|$.
D'après le critère de D'Alembert :

- Si $|z| < 1$, la série $\sum u_n$ est convergente, c'est-à-dire la série $\sum \begin{pmatrix} n+p \\ p \end{pmatrix} z^n$ est absolument convergente.
- Si $|z| > 1$, la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente, c'est-à-dire la série $\sum \begin{pmatrix} n+p \\ p \end{pmatrix} z^n$ est grossièrement divergente.

Donc $R = 1$.

2. Par théorème de dérivation terme à terme, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} n+p \\ p \end{pmatrix} n x^{n-1}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
(1-x)f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{p!(n-1)!}x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{p!(n-1)!}x^n \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1+p)!}{p!k!}x^k - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{p!(n-1)!}x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(n+1+p)!}{p!n!} - \frac{(n+p)!}{p!(n-1)!}\right) x^n + p + 1 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{p!(n-1)!} \left(\frac{n+1+p}{n} - 1\right) x^n + p + 1 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{p!(n-1)!} \times \frac{p+1}{n}x^n + p + 1 \\
&= (p+1)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{p!n!}x^n + 1\right) \\
&= (p+1)f(x)
\end{aligned}$$

Ainsi f est bien solution de l'équation différentielle $(1-x)y' - (p+1)y = 0$.

3. f est donc solution du problème de Cauchy suivant : $\begin{cases} (1-x)y' - (p+1)y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Pour résoudre cette équation différentielle, on pose $a(x) = -\frac{p+1}{1-x}$.
Une primitive de a sur $]-1;1[$ est la fonction A définie par :

$$A(x) = (p+1)\ln(1-x)$$

donc les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$y(x) = K\mathrm{e}^{-(p+1)\ln(1-x)} = \frac{K}{(1-x)^{p+1}}.$$

Avec la condition initiale $f(0) = \begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix} = 1$, on obtient $y(x) = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$.
Le problème de Cauchy étant associé à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec $1 - x \neq 0$ sur $]-1;1[$, ce problème de Cauchy admet, sur $]-1;1[$ une unique solution.
On a donc, pour tout $x \in \,]-1;1[\,$, $f(x) = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$.

Exercice 0.2. *Déterminer une solution développable en série entière au voisinage de* 0 *de l'équation différentielle :*

$$t^2y'' + 4ty' + 2y = \ln(1+t)$$

Exprimer cette solution à l'aide des fonctions usuelles.

On cherche donc y sous la forme $y(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ (série de rayon de convergence R).
On a alors pour tout $t \in]-R;R[$:

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \text{ et } y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

Donc y est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, pour tout $t \in]-R; R[\cap]-1; 1[$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 4 n a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \left(n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n\right) t^n + 4a_1 t + 2a_0 + 2a_1 t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ 6a_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 2, \quad \left(n^2 + 3n + 2\right) a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 1, \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)} \end{cases}$$

Donc $y(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)} t^n$.

On montre grâce au critère de d'Alembret que le rayon de convergence de cette série est égal à 1 .
En utilisation la décomposition $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$, on obtient, pour $t \neq 0$:

$$y(t) = \frac{(t+1)^2}{2t^2} \ln(1+t) - \frac{1}{2t} - \frac{3}{4}$$

et $y(0) = 0$.