Chap.11 : Calcul de dérivées et de primitives

1 Calculer une dérivée

Soit une fonction f dont le domaine de définition est $\mathscr{D}_f$. La fonction dérivée est notée f', elle est définie sur un domaine $\mathscr{D}' \subseteq \mathscr{D}_f$ ($\mathscr{D}'$ peut être n'importe quelle partie de $\mathscr{D}_f$, y compris $\mathscr{D}_f$ et $\emptyset$).

Remarque 1.1. *On utilise la notation "prime" lorsque la fonction a été nommée. Si l'on souhaite dériver une quantité qui n'a pas de nom, on utilisera la notation différentielle.*
Par exemple, la dérivée de $x \mapsto x^3$ s'écrira $\frac{dx^3}{dx}$.

Proposition 1.2. *Voici les dérivées des fonctions de référence :*

$f(x) =$	$f'(x) =$	*Remarque*
k	*0*	$k \in \mathbb{R}$
x	*1*	
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in \mathbb{R}_+^*$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	
$cos(x)$	$-sin(x)$	
$sin(x)$	$cos(x)$	
$arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in]-1;1[$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in]-1;1[$
$arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	

Proposition 1.3. *Dérivation et opérations sur les fonctions.*
Soient u et v deux fonctions dérivables sur des ensembles $\mathscr{D}_u$ et $\mathscr{D}_v$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$f(x) =$	*Dérivable sur*	$f'(x) =$
λu	$\mathscr{D}_u$	$\lambda u'$
$u + v$	$\mathscr{D}_u \cap \mathscr{D}_v$	$u' + v'$
$u \times v$	$\mathscr{D}_u \cap \mathscr{D}_v$	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\mathscr{D}_u \cap \{x \in \mathscr{D}_v, v(x) \neq 0\}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$\frac{1}{u}$	$\{x \in \mathscr{D}_u, u(x) \neq 0\}$	$\frac{-u'}{u^2}$

Proposition 1.4. *Soient f et g deux fonctions telles que $f \circ g$ soit définie. Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur $f(I)$ alors la composée $g \circ f$ est dérivable sur I avec :*

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$$

Application 1.5. *Soit la fonction $u : x \mapsto cos(3x^2 + 3x + 5)$. Déterminer le domaine de dérivabilité de u puis calculer $u'(x)$ sur ce domaine.*

Proposition 1.6. *En appliquant la dérivation des composées, on retrouve les formules suivantes :*

- $(u^n)' = nu^{n-1} \times u', n \in \mathbb{N}^*$
- $(e^u)' = u'e^u$
- $(ln(u))' = \frac{u'}{u}$
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- $(arccos(u))' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $(arcsin(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $(arctan(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$

Méthode 1.7. *Pour calculer la dérivée d'une fonction, on commence par comprendre comment elle est construite, par opérations, à partir des fonctions de référence. Puis on dispose de deux outils :*

1. *le tableau des dérivées des fonctions de référence*
2. *les formules de dérivation pour les opérations sur les fonctions (somme, produit, quotient, composée).*

Application 1.8. *Déterminer le domaine de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$ sur ce domaine :*

1. $f(x) = (cos(x) + 3x^2 + \frac{1}{x})^4$
2. $f(x) = 4e^{4\sqrt{x}+2x^3}$
3. $f(x) = ln(4x^2 + 4x + 2)$
4. $f(x) = 4\sqrt{cos(x) + 3 + 2x^4}$
5. $f(x) = arccos(3x - 4)$

2 Primitive d'une fonction sur un intervalle

2.1 Famille des primitives d'une fonction

Dans tout ce qui suit, f désignera une fonction définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$.

Définition 2.1. *On appelle **primitive de f sur** I toute fonction F définie et dérivable sur I qui vérifie :*

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x)$$

Méthode 2.2. *Pour vérifier qu'une fonction F est une primitive d'une fonction f sur I, on dérive F et on montre l'égalité $F'(x) = f(x)$.*

Application 2.3. *On note $I = \left]-\infty; \frac{-1}{2}\right[$. Soient les fonctions définies sur I par :*

- $f(x) = \frac{3}{(1+2x)^2}$
- $F(x) = \frac{3x}{1+2x}$

La fonction F est-elle une primitive de f ?

Application 2.4. *On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x}$.*

1. *Sur quel intervalle, f est-elle dérivable ?*
2. *Calculer $f'(x)$ sur cet intervalle.*
3. *Qu'en conclure ?*

Théorème 2.5. *On considère une primitive F de f sur I.*

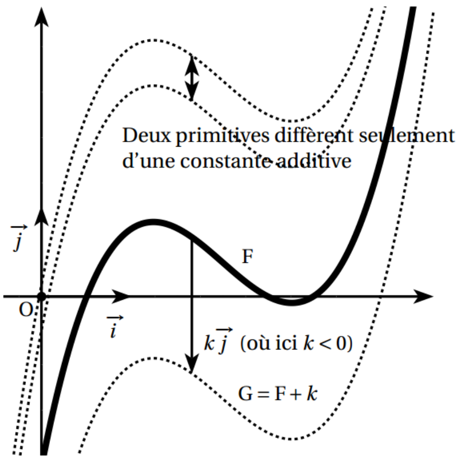
- *Toute fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$ est aussi une primitive de f sur I.*
- *Si F et G sont deux primitives de la fonction f sur I, alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\forall x \in I, G(x) = F(x) + k$$

Remarque 2.6. *Il résulte du théorème précédent que :*

— *Dès lors qu'une fonction admet une primitive, elle en possède une infinité.*

— *Deux primitives d'une même fonction sont "égales" à une constante additive près.*



Application 2.7. *Après avoir déterminer son domaine de dérivabilité, calculer la dérivée de la fonction définie par* $f(x) = xln(x) - x$.
En déduire l'ensemble des primitives de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 2.8. *Toute fonction continue sur un intervalle* I *admet une primitive sur* I.

Remarque 2.9. *Ce théorème nous donne une condition d'existence d'au moins une primitive (donc d'une infinité), mais ne nous dit pas comment l'obtenir.*

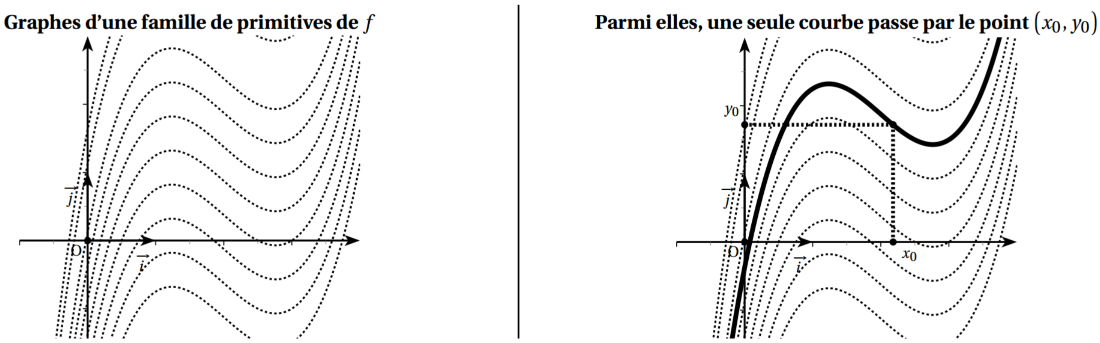
Application 2.10. *Soit la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par* $f(x) = \frac{9x+1}{\sqrt{x}}$.

1. *La fonction admet* $-$ *elleuneprimitivesur* $\mathbb{R}_+^*$ *?*
2. *Déterminer deux réels* a *et* b *tels que la fonction* F *définie par* $F(x) = (ax + b)\sqrt{x}$ *soit une primitive de* f *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

2.2 Problème de l'unicité

Théorème 2.11. *On suppose que f est continue sur I. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.*
Il existe une ***unique*** *primitive F de f sur I vérifiant*

$$F(x_0) = y_0$$



Méthode 2.12. *Pour déterminer la primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$:*

- *On détermine une primitive G de f sur I ;*
- *D'après le Théorème 2.5, F est donc de la forme $F(x) = G(x) + k, k \in \mathbb{R}$;*
- *On calcule $F(x_0)$ puis on résout l'équation $F(x_0) = y_0 = G(x_0) + k$ d'inconnue k*
- *On termine en donnant l'expression finale de $F(x)$.*

Application 2.13. *1. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$F(x) = x^2 - 2sin(x)$$

est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x - 2cos(x).$$

2. Déterminer la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $G(\pi) = 3$.

3 Recherche de primitives

Le théorème 2.8 pour les fonctions continues ne fournit pas de méthode pour obtenir une primitive.
Deux moyens s'offrent à nous pour obtenir des primitives :

1. Construire un catalogue de fonctions continues dont on connaît l'expression d'une primitive
2. Travailler directement à partir de la définition d'une primitive : $F' = f$ en essayant de faire une "lecture inverse" des formules de dérivation.

3.1 En utilisant le tableau des dérivées usuelles

Proposition 3.1. *Le tableau suivant fournit une primitive pour quelques fonctions de référence :*

$f(x) =$	$F(x) =$	*Domaine de validité*
$a \in \mathbb{R}$	ax	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$ln(x)$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\frac{-1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$sin(x)$	$-cos(x)$	$\mathbb{R}$
$cos(x)$	$sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{cos^2(x)}$	$tan(x)$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsin(x)$	$]-1; 1[$

Application 3.2. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :*

$$f(x) = x^4 + e^x - \frac{1}{x} + sin(x)$$

Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ puis en déduire toutes les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.2 En utilisant le tableau des fonctions dérivées

Proposition 3.3.

Si f est de la forme	*Alors $F =$*	*Remarques*
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$
$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	$n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$, *$u$ ne s'annule pas*
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$
$\frac{u'}{u}$	$ln(\mid u \mid)$	*u doit être de signe constant*
$u'e^u$	e^u	
$u'cos(u)$	$sin(u)$	
$u'sin(u)$	$-cos(u)$	
$\frac{u'}{1+u^2}$	$arctan(u)$	

Application 3.4. *Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant le domaine de validité :*

1. $f(x) = \frac{2x}{x^2+5}$
2. $f(x) = xe^{x^2}$
3. $f(x) = \frac{1}{1+4x^2}$
4. $f(x) = 2x^3(x^4+3)^5$
5. $f(x) = e^x sin(e^{3x})$
6. $f(x) = \frac{5x}{(3x^2+2)^7}$
7. $f(x) = \frac{2x}{2+8x^2}$

Remarque 3.5. *Il existe des outils de calcul de primitive en ligne.*
Par exemple sur le site :

www.solumaths.com/fr/calculatrice-en-ligne/calculer/primitive