Chap.40 : Applications linéaires

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un élément de $\mathbb{K}$ est appelé un scalaire.
E, F et G désigneront trois $\mathbb{K}-$espaces vectoriels.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1. *Soit une application $f : E \to F$. On dit que f est une **application linéaire** lorsque :*

- $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2, f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})$
- $\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda \overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{u})$

On note $\boldsymbol{\mathscr{L}(E, F)}$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Remarque 1.2.
- *Les applications linéaires sont les applications qui préservent les deux opérations qui définissent la structure d'espace vectoriel.*
- *En pratique, on utilisera la caractérisation suivante :*

$$f \in \mathscr{L}(E, F) \Leftrightarrow \forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})$$

Proposition 1.3. *Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors :*

- $f(\overrightarrow{0}_E) = \overrightarrow{0}_F$
- $\forall \overrightarrow{u} \in E, f(-\overrightarrow{u}) = -f(\overrightarrow{u})$

Preuve :

Application 1.4. *Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $f(1, 0) = -3$ et $f(0, 1) = 2$. Calculer $f(-3, 5), f(2, -1)$ et $f(3, 0)$.*

Application 1.5. *Soit* $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto 2x - y \end{cases}$.
Démontrer que f *est une application linéaire.*

Proposition 1.6. *Si* $f \in \mathscr{L}(E,F)$ *alors l'image par* f *d'une combinaison linéaire est égale à la combinaison linéaire des images par* f *:*

$$\forall(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, f(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{u}_i) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_i f(\overrightarrow{u}_i)$$

Définition 1.7. *Soit* $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

- *Lorsque* $F = E$*, on dit que* f *est un* ***endomorphisme*** *de* E*. L'ensemble des endomorphismes de* E *se note* $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$.
- *Lorsque* f *est bijective de* E *dans* F*, on dit que c'est un* ***isomorphisme****. Lorsqu'une telle application existe, on dit que* E *et* F *sont isomorphes.*
- *Lorsque* f *est un endomorphisme bijectif, on dit que c'est un* ***automorphisme****. L'ensemble des automorphismes de* E *est noté* $\boldsymbol{GL(E)}$*, cet ensemble est appelé le groupe linéaire de* E.
- *Lorsque* $F = \mathbb{K}$*, on dit que* f *est une forme linéaire.*
  L'ensemble des formes linéaires sur E *est appelé le* ***dual*** *de* E *et se note* $\boldsymbol{E^*}$.

Exemple 1.8. ***Exemples simples importants.***

- $id_E : \begin{cases} E \to E \\ \overrightarrow{u} \mapsto \overrightarrow{u} \end{cases}$ *est une application linéaire, il s'agit même d'un automorphisme de* E.
- *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *alors* $h_\lambda : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \overrightarrow{u} \mapsto \lambda \overrightarrow{u} \end{cases}$ *est une application linéaire appelée* ***homothétie*** *de rapport* λ*. C'est un automorphisme de* $\mathbb{R}^n$.
- $I : \begin{cases} \mathscr{C}([a;b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$ *est une forme linéaire sur l'espace-vectoriel* $\mathscr{C}([a;b], \mathbb{R})$.

Application 1.9. *Soit* $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto XP' + P \end{cases}$*. Démontrer que* $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

1.2 Opérations sur les applications linéaires

Proposition 1.10.

- *Soient f et $g \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :*

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda f + \mu g \in \mathscr{L}(E,F)$$

On en déduit en particulier que $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}-$espace-vectoriel.

- *Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $g \circ f$ est une application linéaire : $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.*
  En particulier, la composée de deux endomorphisme reste un endomorphisme.

Preuve :

Proposition 1.11. *Soit un isomorphisme $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors f^{-1} est une application linéaire de $\mathscr{L}(F,E)$. D'autre part :*

$$f \circ f^{-1} = id_F \text{ et } f^{-1} \circ f = id_E$$

Si $g \in \mathscr{L}(F,G)$ est aussi un isomorphisme alors $g \circ f$ est un isomorphisme avec :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

1.3 Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

Proposition 1.12. *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

- *Pour tout sous-espace vectoriel E_1 de E, l'image directe $f(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F.*

- *Pour tout sous-espace vectoriel F_1 de F, l'image réciproque $f^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Définition 1.13. *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*

- *On appelle **noyau** de f, le sous-espace vectoriel de E noté :*

$$Ker(f) = f^{-1}(\left\{\overrightarrow{0}_F\right\}) = \left\{\overrightarrow{u} \in E, f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}_F\right\}$$

- *On appelle **image** de f, le sous-espace vectoriel de F noté :*

$$Im(f) = f(E) = \{f(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{u} \in E\} = \{\overrightarrow{v} \in F, \exists \overrightarrow{u} \in E, \overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u})\}$$

Exemple 1.14.

- *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Si f est l'application nulle alors :*

$$Ker(f) = E \text{ et } Im(f) = \left\{\overrightarrow{0}_F\right\}$$

- *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Si $f = id_E$ alors :*

$$Ker(f) = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\} \text{ et } Im(f) = E$$

Méthode 1.15. *On peut utiliser la Propriété 1.12 pour démontrer qu'un sous-ensemble est un espace vectoriel. Pour cela, on peut le voir comme l'image directe ou réciproque d'un autre sous-espace vectoriel par une application linéaire.*
Dans certains cas, on peut en particulier le voir comme le noyau ou l'image d'une application linéaire.

Application 1.16. *Démontrer que $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 3y + z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*

Application 1.17. *On admet que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$. Déterminer $Ker(f)$.*

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x - y + z, 2x + y, x - 2y) \end{array} \right.$$

Application 1.18. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_3\left[X\right] \to \mathbb{R}_3\left[X\right] \\ P \mapsto (X^2-1)P'' + XP' \end{array} \right.$ *. On admet que* $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3\left[X\right])$*. Déterminer* $Ker(f)$*.*

Proposition 1.19. ***Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.***
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$*, alors :*

- f *est injective si et seulement si* $Ker(f) = \left\{ \overrightarrow{0}_E \right\}$
- f *est surjective si et seulement si* $Im(f) = F$

Application 1.20. *Démontrer que l'application linéaire* $\phi : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}\left[X\right] \to \mathbb{K}\left[X\right] \\ P \mapsto P' \end{array} \right.$ *est surjective mais non injective.*

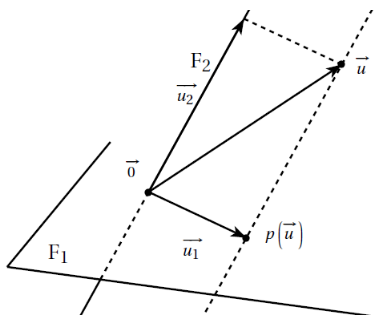
Application 1.21. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - MA \end{array} \right.$ *. On admet que* $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$*.*
f *est-elle injective ?*

2 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

2.1 Projecteurs

Définition 2.1. *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E, c'est-à-dire $E = F_1 \oplus F_2$.*
*On appelle **projecteur** sur F_1 parallèlement à F_2 (ou de direction F_2), l'application :*

$$f : \begin{cases} E = F_1 \oplus F_2 \to E \\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2 \mapsto \overrightarrow{u}_1 \end{cases}$$



Proposition 2.2. *Soit un projecteur p. Alors :*

- *p est un endomorphisme de E ;*
- *$p \circ p = p$;*
- *$Ker(p) = F_2$ et $Im(p) = F_1$*

Théorème 2.3. *Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ alors :*

$$p \text{ est un projecteur} \Leftrightarrow p \circ p = p$$

Dans ce cas, p est la projection sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$ et on a alors $E = Ker(p) \oplus Im(p)$.

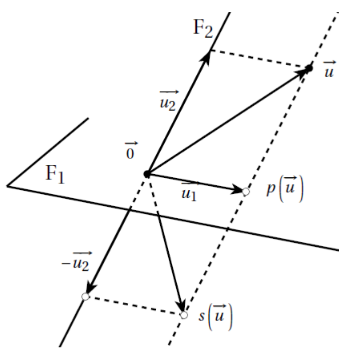
Application 2.4. *Soit* $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \frac{1}{3}(-x + 2y, -2x + 4y) \end{cases}$.

1. *Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Démontrer que f est un projecteur.*
3. *Déterminer les éléments caractéristiques de f.*

2.2 Symétries

Définition 2.5. *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E, c'est-à-dire $E = F_1 \oplus F_2$.*
On appelle ***symétrie vectorielle*** *par rapport à F_1 parallèlement à F_2 (ou de direction F_2), l'application s définie par :*

$$s : \left\{ \begin{array}{l} E = F_1 \oplus F_2 \to E \\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2 \mapsto \overrightarrow{u}_1 - \overrightarrow{u}_2 \end{array} \right.$$



Proposition 2.6. *Soit s une symétrie vectorielle par rapport à F_1 parallèlement à F_2. Alors :*

- $s \in \mathscr{L}(E)$
- $s \circ s = id_E$
- $F_1 = Ker(s - id_E) = \{\overrightarrow{u} \in E, s(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}\}$ *et*

  $F_2 = Ker(s + id_E) = \{\overrightarrow{u} \in E, s(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u}\}$
- $s \in GL(E)$ *donc* $Ker(s) = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$ *et* $Im(s) = E$

Proposition 2.7. *On note :*

- *p le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2*
- *q le projecteur sur F_2 parallèlement à F_1*
- *s la symétrie vectorielle par rapport à F_1 parallèlement à F_2.*

Alors :

- $s = p - q$
- $s = 2p - id_E$
- $q = id_E - p$

Preuve :

Proposition 2.8. *Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. Alors :*

$$s \text{ est une symétrie vectorielle} \Leftrightarrow s \circ s = id_E$$

*Plus généralement, une application vérifiant la relation $f \circ f = id$ est dite **involutive**.*

Application 2.9. *On admet que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$ avec :*

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\right\} \text{ et } G = Vect(\{(1, 1, 1, 1,)\})$$

Expliciter la symétrie par rapport à G parallèlement à F.

Application 2.10. *Soit* $\phi : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P(-X) \end{array} \right.$.
Démontrer que ϕ est une symétrie vectorielle dont on déterminera les éléments caractéristiques.

3 Applications linéaires en dimension finie

E désignera désormais un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie.

3.1 Applications linéaires et familles de vecteurs

Théorème 3.1. *Une application linéaire est déterminée de manière unique par les images des éléments d'une base quelconque de E.*
Soit F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et :

1. $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ *une base de E*
2. $\left\{\overrightarrow{f}_1, ..., \overrightarrow{f}_n\right\}$ *une famille de vecteurs de F*

alors il existe une unique application linéaire f telle que :

$$\forall i \in [\![1; n]\!], f(\overrightarrow{e}_i) = \overrightarrow{f}_i$$

Remarque 3.2. *Le théorème précédent indique que pour connaître une application $f \in \mathscr{L}(E, F)$, il suffit de connaître les images des vecteurs d'une base de E par cette application.*

Application 3.3. *Exprimer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que :*

$$f(\overrightarrow{e}_1) = (2, 1, 4), f(\overrightarrow{e}_2) = (0, 1, -1) \text{ et } f(\overrightarrow{e}_3) = (-1, 0, 1)$$

où $\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{e}_3\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 3.4. *Si $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ est une base de E alors $\{f(\overrightarrow{e}_1), ..., f(\overrightarrow{e}_n)\}$ est une famille génératrice de $Im(f)$.*
En particulier, on en déduit que $Im(f)$ est de dimension finie.

Preuve :

Application 3.5. *Soit* $\mathscr{B} = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*. Soit* $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ *tel que :*

- $f(\overrightarrow{i}) = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$
- $f(\overrightarrow{j}) = -4\overrightarrow{i} - 7\overrightarrow{j} + 10\overrightarrow{k}$
- $f(\overrightarrow{k}) = -2\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}$

1. *Déterminer l'expression analytique de* f*.*
2. *Démontrer que* f *est un projecteur.*
3. *Déterminer* $Ker(f)$ *et* $Im(f)$*.*

3.2 Isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie

Proposition 3.6. *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}-$*espaces vectoriels de dimension finie,* $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ *une base de* E *et* $f \in \mathscr{L}(E, F)$*. Alors :*

- f *est injective* $\Leftrightarrow \{f(\overrightarrow{e}_1), ..., f(\overrightarrow{e}_n)\}$ *est une famille libre de* F*.*
- f *est surjective* $\Leftrightarrow \{f(\overrightarrow{e}_1), ..., f(\overrightarrow{e}_n)\}$ *est une famille génératrice de* F*.*
- f *est bijective* $\Leftrightarrow \{f(\overrightarrow{e}_1), ..., f(\overrightarrow{e}_n)\}$ *est une base de* F*.*

Théorème 3.7. *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}-$*espaces vectoriels de dimension finie :*

$$E \text{ et } F \text{ sont isomorphes} \Leftrightarrow dim(E) = dim(F)$$

Exemple 3.8.

- $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *et* $\mathbb{R}^4$ *sont isomorphes.*
- $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *et* $\mathbb{R}_3[X]$ *sont isomorphes.*

3.3 Théorème du rang et conséquences

Théorème 3.9. ***Théorème du rang***
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors :

$$dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$$

Proposition 3.10. *Si $dim(E) = dim(F)$ et $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors :*

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective}$$

Méthode 3.11. *Pour démontrer qu'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est un isomorphisme, il suffit donc de montrer :*

- *soit que $dim(E) = dim(F)$ et que f est injective ;*
- *soit que $dim(E) = dim(F)$ et que f est surjective.*

Remarque 3.12. *Ce résultat est faux en dimension infinie. Par exemple $f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$ est surjective mais non injective.*

Application 3.13. *Démontrer que $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X] \\ (a, b, c) \mapsto (a+b)X^2 + (b+c)X + a + b + c \end{cases}$ est un isomorphisme.*
On admettra que ϕ est linéaire.

3.4 Rang d'une application linéaire

Définition 3.14. *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle **rang** de f la dimension de $Im(f)$, on le note $rg(f)$:*

$$rg(f) = dim(Im(f))$$

Proposition 3.15. *Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ une base de E.*
Alors le rang de f est égal au rang de la famille $\{f(\overrightarrow{e}_1), ..., f(\overrightarrow{e}_n)\}$.

Application 3.16. *Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x+y, y-z, z+x) \end{cases}$.*
On admettra que f est linéaire.
Déterminer le rang de f ainsi qu'une base de $Im(f)$.

Application 3.17. *Soit* $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X-1) \end{cases}$.
On admet que $\phi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$.

1. *Déterminer les images par* ϕ *des vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$.
2. *En déduire le rang de* ϕ.

Proposition 3.18. ***Rang de la composée de deux applications linéaires*** *Soit* $f \in \mathscr{L}(E,F)$ *et* $g \in \mathscr{L}(F,G)$ *où* E *et* F *sont de dimension finie. Alors :*

- $rg(g \circ f) \leq \min(rg(f), rg(g))$.
- *Si* f *est surjective alors* $rg(g \circ f) = rg(g)$.
- *Si* f *est injective alors* $rg(g \circ f) = rg(f)$.