Chap.12 : Calcul de sommes et de produits

Dans tout ce qui suivra, n, p et q désigneront des entiers naturels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignera une suite de nombres réels ou complexes.

1 Sommes finies

1.1 La notation de sommation

Définition 1.1. *La somme $u_0 + u_1 + ... + u_n$ des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est notée :* $\boldsymbol{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k}$.

On dit que la "variable" k est l'indice de la somme ou que la somme est indexée par k.
La somme $u_p + u_1 + ... + u_q$ des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les indices sont compris entre p et q où $p \leq q$ est notée : $\boldsymbol{\sum\limits_{k=p}^{q} u_k}$.

Application 1.2. *Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$:*

1. $S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{15}$
2. $S_2 = 4^3 + 5^3 + ... + 59^3$
3. $S_3 = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + ... + \frac{37}{38}$
4. $S_4 = 3 \times 4 + 4 \times 5 + ... + 23 \times 24$
5. $S_5 = 1 + 2 + 4 + 8 + ... + 1024$

Application 1.3. *Écrire explicitement les sommes :*

$$S_1 = \sum_{i=0}^{5} \frac{1}{2i+2},\ S_2 = \sum_{i=2}^{6} \frac{i^2}{3i-2} \text{ et } S_3 = \sum_{k=1}^{6} cos(\frac{k\pi}{6})$$

1.2 Sommes à connaître

Proposition 1.4.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\forall q \in \mathbb{R} - \{1\}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Application 1.5. *Calculer les sommes suivantes en donnant le résultat sous forme fractionnaire :*

1. $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{70} 3k$
2. $S_2 = \sum\limits_{k=0}^{7} (-3)^k$
3. $S_3 = \sum\limits_{k=0}^{8} \frac{1}{e^k}$
4. $S_4 = \sum\limits_{k=0}^{6} (\frac{-3}{10})^k$

1.3 La relation de Chasles pour une somme finie

Proposition 1.6. *Pour tout entier naturel $n_0 \in [\![p, q]\!]$ avec $p < q$, alors :*

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = \sum_{k=p}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^{q} u_k$$

Proposition 1.7. $\forall q \in \mathbb{R} - \{1\}, \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, m \leq n \sum\limits_{k=m}^{n} q^k = q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$

Preuve :

Application 1.8. *Calculer les sommes suivantes en donnant le résultat sous forme fractionnaire :*

1. $S_1 = \sum\limits_{i=12}^{30} i$
2. $S_2 = \sum\limits_{k=3}^{12} (-2)^k$
3. $S_3 = \sum\limits_{k=4}^{10} \frac{1}{5^k}$
4. $S_4 = \sum\limits_{k=4}^{11} (-\frac{1}{5})^k$

1.4 Linéarité

Proposition 1.9.

- $\sum\limits_{k=p}^{q} (u_k + v_k) = \sum\limits_{k=p}^{q} u_k + \sum\limits_{k=p}^{q} v_k$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \sum\limits_{k=p}^{q} \lambda u_k = \lambda \sum\limits_{k=p}^{q} u_k$

Application 1.10. *Exprimer en fonction de n les sommes :*

1. $S_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} (3k)$
2. $S_2 = \sum\limits_{k=0}^{n} (5k - 5^k)$
3. $S_3 = \sum\limits_{k=1}^{n} (3k - 4)$

1.5 Changement d'indice dans une somme

On peut parfois être amené à effectuer un « changement d'indice » dans une somme. Voici un exemple.
On part de la somme $\sum\limits_{k=0}^{6} u_k$ et on effectue le changement d'indice $k = l - 2$, alors $l = k + 2$ et :

k	1	2	3	4	5	6
$l = k + 2$	**3**	4	5	6	7	**8**

Ainsi, le nouvel indice va de $1 + 2 = 3$ à $6 + 2 = 8$.
D'où : $\sum\limits_{k=1}^{6} u_k = \sum\limits_{l=3}^{8} u_{l-2}$

Proposition 1.11. $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{l=p}^{n+p} u_{l-p}$

Méthode 1.12. *Pour effectuer un changement d'indice dans une somme indexée par l'indice k :*

1. *on identifie la relation entre l'ancien indice k et le nouvel indice l ;*
2. *à l'aide des bornes de l'ensemble d'indexation de k, on détermine l'ensemble d'indexation de l ;*
3. *on écrit le symbole $\sum$ avec le nouvel indice l et ses nouvelles bornes ;*
4. *dans le terme général de la somme, on remplace k par son expression en fonction de l.*

Application 1.13. *Dans chacun des cas suivants, effectuer le changement de variable demandé dans la somme S :*

1. $S = \sum\limits_{k=1}^{10} k^2$ *en posant* $l = k - 1$
2. $S = \sum\limits_{l=3}^{8} 3l + 1$ *en posant* $n = l - 3$
3. $S = \sum\limits_{m=2}^{10} \frac{2m}{m+3}$ *en posant* $k = m - 2$

4. $S = \sum\limits_{i=1}^{6} cos(\frac{\pi i}{6})$ *en posant* $l = i - 1$

Application 1.14. *Effectuer un changement d'indice dans la somme* $\sum\limits_{i=3}^{n+1} ln(i)$ *de sorte que la somme soit indexée à partir de 0.*

Application 1.15. *Effectuer un changement d'indice dans la somme*

$$\sum_{k=0}^{n} (k+3)^2$$

de sorte que le terme général de la somme devienne i^2*, où* i *est le nouvel indice de sommation.*

1.6 Sommes télescopiques

Proposition 1.16. *Pour* $p \leq n$*, on a :* $\sum\limits_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$.

On dit alors que la somme est ***télescopique****.*

Application 1.17.

1. *Vérifier que :* $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
2. *En déduire la valeur de* $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ *en fonction de* n.

Application 1.18. *Exprimer* $\sum_{i=2}^{n} ln(1 - \frac{1}{i})$ *en fonction n grâce à un télescopage de termes.*

1.7 Factorisation de $a^n - b^n$

Théorème 1.19. *Soient* a *et* $b \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$$

Preuve :

Application 1.20. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \mathbb{R}$*, factoriser l'expression* $1 - x^n$*.*

Proposition 1.21.
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
- $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

Application 1.22. *Factoriser les expressions suivantes :*

1. $x^5 - 32$
2. $8x^3 - 64$
3. $625 - 16x^4$
4. $e^3 - 27x^3$

2 Produits finis

2.1 La notation de produit

Définition 2.1. *Le produit* $u_0 \times u_1 \times ... \times u_n$ *des* $n+1$ *premiers termes de la suite* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est noté* $\boldsymbol{\prod_{k=0}^{n} u_k}$.
On lit cette écriture "produit de $k=0$ *jusqu'à* n *de* u_k*".*
on dit que le produit est ***indexé*** *par* k *ou que* k *est l'****indice*** *du produit.*
Le produit $u_p \times u_{p+1} \times ... \times u_q$ *des termes de la suite* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *dont les indices sont compris entre* p *et* q*, si* $p \leq q$*, est noté :*

$$\prod_{k=p}^{q} u_k = u_p \times u_{p+1} \times ... \times u_q$$

Application 2.2. *Écrire à l'aide du symbole* $\prod$ *:*

1. $\frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \times ... \times \frac{1}{32}$
2. $sin(\frac{\pi}{2}) \times sin(\frac{\pi}{2^2}) \times sin(\frac{\pi}{2^3}) ... \times sin(\frac{\pi}{2^{15}})$

Application 2.3. *Exprimer chacun des produits suivants sans le symbole* $\prod$ *:*

1. $\prod_{i=1}^{7} \frac{i}{i+1}$
2. $\prod_{k=1}^{12} 3k$
3. $\prod_{l=0}^{7} 4^l$
4. $\prod_{k=2}^{6} \frac{2k}{k-1}$

2.2 Opérations sur les produits

Proposition 2.4. *Relation de Chasles.*
Pour tout entier $n_0 \in [\![p;q]\!]$ avec $p < q$, on a :

$$\prod_{k=p}^{q} u_k = (\prod_{k=p}^{n_0} u_k) \times (\prod_{k=n_0+1}^{q} u_k)$$

Proposition 2.5. *Si $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une autre suite de nombres réels ou complexes, et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :*

- $\prod_{k=p}^{q} (u_k \times v_k) = (\prod_{k=p}^{q} u_k) \times (\prod_{k=p}^{q} v_k)$
- $\prod_{k=p}^{q} (\lambda u_k) = \lambda^{q-p+1} \prod_{k=p}^{q} u_k$

Proposition 2.6. *Changement d'indice dans un produit.*
La changement d'indice $k = l - p$ laisse le produit inchangé :

$$\prod_{k=0}^{n} u_k = \prod_{l=p}^{n+p} u_{l-p}$$

Application 2.7. *Exprimer sans le symbole $\prod$:*

1. $\prod_{i=0}^{10} (\frac{2}{5})^i \times \prod_{i=0}^{10} (\frac{1}{4})^i$
2. $\prod_{k=0}^{9} 4^k$
3. $\prod_{i=2}^{9} (2 \times 3^i)$

Application 2.8. *Donner une autre écriture du produit $P = \prod_{k=4}^{30} 3^{k-3}$ à l'aide du symbole $\prod$.*

Proposition 2.9. • $exp(\sum_{k=0}^{n} u_k) = \prod_{k=0}^{n} e^{u_k}$

• *On suppose que* $u_k > 0$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *alors :*

$$ln(\prod_{k=0}^{n} u_k) = \sum_{k=0}^{n} ln(u_k)$$

Proposition 2.10. *Il existe également une notion de produit télescopique. Pour* $p \leq n$, $\prod_{k=p}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_p}$.

Application 2.11. *Exprimer en fonction de* n *et sans les symboles* $\prod$ *et* $\sum$ *:*

1. $\prod_{k=0}^{n} exp(3k)$
2. $\sum_{i=1}^{n} ln(5 \times \frac{i+1}{i})$

3 Triangle de pascal et binôme de Newton

3.1 Factorielle d'un entier et coefficients binomiaux

Définition 3.1. *On appelle factorielle de* $n \in \mathbb{N}$ *le nombre entier que l'on note* $\boldsymbol{n\,!}$ *et que l'on lit "factorielle n" par :*

$$0! = 1 \text{ et si } n \neq 0,\ n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$$

Application 3.2. *Soit* $n \geq 4$, *simplifier les écritures :*

1. $Q_1 = \frac{(n+2)!}{3!(n-4)!}$

2. $Q_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} ln(2i)$

Définition 3.3. *Les **coefficients binomiaux** sont les entiers naturels notés* $\binom{n}{p}$ *et qui se lisent "p parmi n", définis par :*

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!\times(n-p)!} & si\ 0 \leq p \leq n \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Proposition 3.4.
- $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ *et* $\binom{n}{n} = 1$
- $\forall p \in [\![0; n]\!], \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

Preuve :

Application 3.5. *Calculer* $A = \binom{9}{4}$, $B = \binom{100}{99}$ *et* $C = \binom{102}{2}$.

Proposition 3.6. ***Relation de Pascal.***
Soit un entier naturel n et $1 \leq k \leq n-1$, alors :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Définition 3.7. ***Le triangle de Pascal.***

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6	7	$k-1$	k
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15 $+$	20	15	6	1			
7	1	7	21	$=$ 35	35	21	7	1		
$\vdots$	$\vdots$									
$n-1$									$\binom{n-1}{k-1}$ $+$	$\binom{n-1}{k}$
n										$=$ $\binom{n}{k}$

3.2 Binôme de Newton

Théorème 3.8. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Développez les expressions suivantes :

1. $(3x+2)^3$
2. $(2x-1)^4$
3. $(3-4x)^3$
4. $(2x+3)^5$

Application 3.9. *Exprimer en fonction de n les sommes suivantes :*

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$
2. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
3. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$
4. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 5^{n-k}$