# Chap.12 : Calcul de sommes et de produits

Dans tout ce qui suivra, n, p et q désigneront des entiers naturels et  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  désignera une suite de nombres réels ou complexes.

#### 1 Sommes finies

#### 1.1 La notation de sommation

**Définition 1.1.** La somme  $u_0 + u_1 + ... + u_n$  des n + 1 premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est notée :  $\sum_{k=0}^{n} u_k$ .

On dit que la "variable" k est l'indice de la somme ou que la somme est indexée par k.

La somme  $u_p + u_1 + ... + u_q$  des termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dont les indices sont compris entre p et q où  $p \leq q$  est notée :  $\sum_{k=n}^{q} u_k$ .

Application 1.2. Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole  $\sum$ :

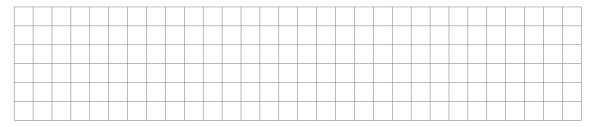
1. 
$$S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{15}$$

2. 
$$S_2 = 4^3 + 5^3 + \dots + 59^3$$

3. 
$$S_3 = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{37}{38}$$

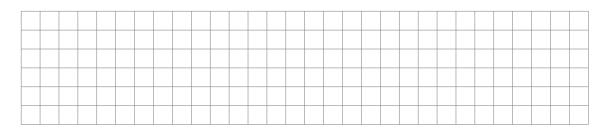
4. 
$$S_4 = 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots + 23 \times 24$$

5. 
$$S_5 = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 1024$$



Application 1.3. Écrire explicitement les sommes :

$$S_1 = \sum_{i=0}^{5} \frac{1}{2i+2}, \ S_2 = \sum_{i=2}^{6} \frac{i^2}{3i-2} \ et \ S_3 = \sum_{k=1}^{6} cos(\frac{k\pi}{6})$$



#### 1.2 Sommes à connaître

**Proposition 1.4.** •  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 

• 
$$\forall q \in \mathbb{R} - \{1\}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

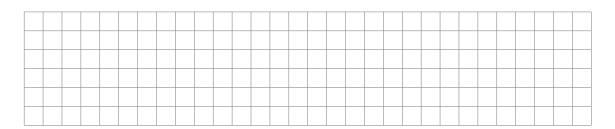
**Application 1.5.** Calculer les sommes suivantes en donnant le résultat sous forme fractionnaire :

1. 
$$S_1 = \sum_{k=1}^{70} 3k$$

3. 
$$S_3 = \sum_{k=0}^{8} \frac{1}{e^k}$$

2. 
$$S_2 = \sum_{k=0}^{7} (-3)^k$$

4. 
$$S_4 = \sum_{k=0}^{6} \left(\frac{-3}{10}\right)^k$$



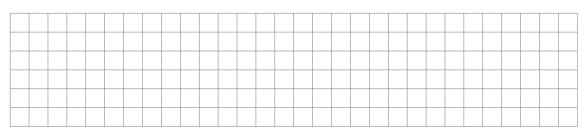
#### 1.3 La relation de Chasles pour une somme finie

**Proposition 1.6.** Pour tout entier naturel  $n_0 \in [p, q]$  avec p < q, alors :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = \sum_{k=p}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^{q} u_k$$

**Proposition 1.7.**  $\forall q \in \mathbb{R} - \{1\}, \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, m \leq n \sum_{k=m}^n q^k = q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$ 

Preuve:



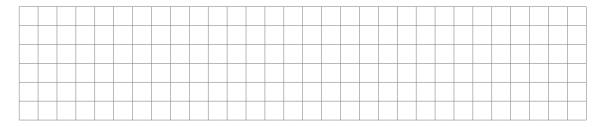
Application 1.8. Calculer les sommes suivantes en donnant le résultat sous forme fractionnaire:

1. 
$$S_1 = \sum_{i=12}^{30} i$$

3. 
$$S_3 = \sum_{k=4}^{10} \frac{1}{5^k}$$

2. 
$$S_2 = \sum_{k=3}^{12} (-2)^k$$

4. 
$$S_4 = \sum_{k=4}^{11} (-\frac{1}{5})^k$$



#### 1.4 Linéarité

**Proposition 1.9.** • 
$$\sum_{k=p}^{q} (u_k + v_k) = \sum_{k=p}^{q} u_k + \sum_{k=p}^{q} v_k$$

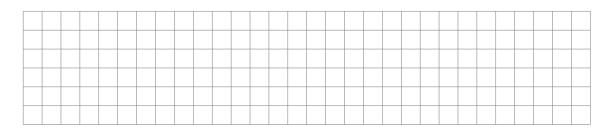
• 
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \sum_{k=p}^{q} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=p}^{q} u_k$$

Application 1.10. Exprimer en fonction de n les sommes :

1. 
$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} (3k)$$

3. 
$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} (3k - 4)$$

2. 
$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} (5k - 5^k)$$



#### 1.5 Changement d'indice dans une somme

On peut parfois être amené à effectuer un « changement d'indice » dans une somme. Voici un exemple.

On part de la somme  $\sum_{k=0}^{6} u_k$  et on effectue le changement d'indice k = l - 2,

alors l = k + 2 et :

k	1	2	3	4	5	6
l = k + 2	3	4	5	6	7	8

Ainsi, le nouvel indice va de 1+2=3 à 6+2=8.

D'où : 
$$\sum_{k=1}^{6} u_k = \sum_{l=3}^{8} u_{l-2}$$

**Proposition 1.11.** 
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{l=n}^{n+p} u_{l-p}$$

**Méthode 1.12.** Pour effectuer un changement d'indice dans une somme indexée par l'indice k:

- 1. on identifie la relation entre l'ancien indice k et le nouvel indice l;
- 2. à l'aide des bornes de l'ensemble d'indexation de k, on détermine l'ensemble d'indexation de l ;
- 3. on écrit le symbole  $\sum$  avec le nouvel indice l et ses nouvelles bornes;
- 4. dans le terme général de la somme, on remplace k par son expression en fonction de l.

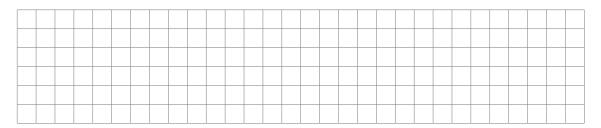
**Application 1.13.** Dans chacun des cas suivants, effectuer le changement de variable demandé dans la somme S:

1. 
$$S = \sum_{k=1}^{10} k^2$$
 en posant  $l = k-1$ 

2. 
$$S = \sum_{l=3}^{8} 3l + 1$$
 en posant  $n = l - 3$ 

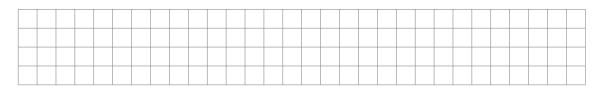
3. 
$$S = \sum_{m=2}^{10} \frac{2m}{m+3}$$
 en posant  $k = m-2$ 

4. 
$$S = \sum_{i=1}^{6} \cos(\frac{\pi i}{6})$$
 en posant  $l = i - 1$ 



**Application 1.14.** Effectuer un changement d'indice dans la somme  $\sum\limits_{i=3}^{n+1} ln(i)$ 

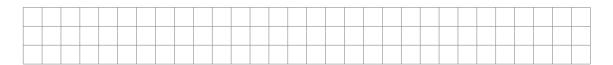
de sorte que la somme soit indexée à partir de 0.



Application 1.15. Effectuer un changement d'indice dans la somme

$$\sum_{k=0}^{n} (k+3)^2$$

de sorte que le terme général de la somme devienne  $i^2$ , où i est le nouvel indice de sommation.



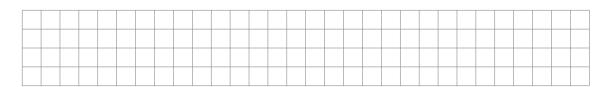
#### 1.6 Sommes télescopiques

**Proposition 1.16.** Pour 
$$p \le n$$
, on  $a : \sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$ .

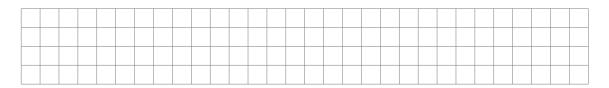
On dit alors que la somme est télescopique.

**Application 1.17.** 1. Vérifier que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ 

2. En déduire la valeur de  $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$  en fonction de n.



**Application 1.18.** Exprimer  $\sum_{i=2}^{n} ln(1-\frac{1}{i})$  en fonction n grâce à un télescopage de termes.

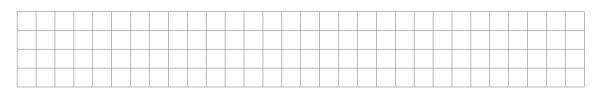


#### 1.7 Factorisation de $a^n - b^n$

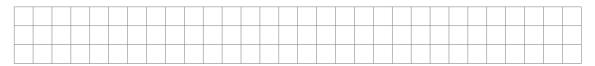
**Théorème 1.19.** Soient a et  $b \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$a^{n} - b^{n} = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{k} b^{n-k-1}$$

Preuve:



**Application 1.20.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ , factoriser l'expression  $1 - x^n$ .



**Proposition 1.21.** •  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ 

• 
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

• 
$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

• 
$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

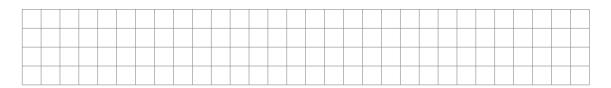
Application 1.22. Factoriser les expressions suivantes :

1. 
$$x^5 - 32$$

3. 
$$625 - 16x^4$$

2. 
$$8x^3 - 64$$

4. 
$$e^3 - 27x^3$$



### 2 Produits finis

#### 2.1 La notation de produit

**Définition 2.1.** Le produit  $u_0 \times u_1 \times ... \times u_n$  des n+1 premiers termes de la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est noté  $\prod_{k=0}^{n} u_k$ .

On lit cette écriture "produit de k=0 jusqu'à n de  $u_k$ ". on dit que le produit est **indexé** par k ou que k est l'**indice** du produit. Le produit  $u_p \times u_{p+1} \times ... \times u_q$  des termes de la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dont les indices sont compris entre p et q, si  $p \leq q$ , est noté :

$$\prod_{k=p}^q u_k = u_p \times u_{p+1} \times \ldots \times u_q$$

**Application 2.2.** Écrire à l'aide du symbole  $\prod$ :

1. 
$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \times ... \times \frac{1}{32}$$

2. 
$$sin(\frac{\pi}{2}) \times sin(\frac{\pi}{2^2}) \times sin(\frac{\pi}{2^3}) \dots \times sin(\frac{\pi}{2^{15}})$$



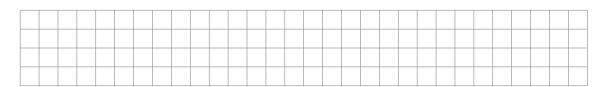
**Application 2.3.** Exprimer chacun des produits suivants sans le symbole  $\prod$ :

$$1. \prod_{i=1}^{7} \frac{i}{i+1}$$

$$3. \prod_{l=0}^{7} 4^l$$

2. 
$$\prod_{k=1}^{12} 3k$$

$$4. \prod_{k=2}^{6} \frac{2k}{k-1}$$



#### 2.2 Opérations sur les produits

Proposition 2.4. Relation de Chasles.

Pour tout entier  $n_0 \in \llbracket p;q \rrbracket$  avec p < q, on a:

$$\prod_{k=p}^q u_k = (\prod_{k=p}^{n_0} u_k) \times (\prod_{k=n_0+1}^q u_k)$$

**Proposition 2.5.** Si  $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$  est une autre suite de nombres réels ou complexes, et si  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors :

$$\bullet \prod_{k=p}^{q} (u_k \times v_k) = (\prod_{k=p}^{q} u_k) \times (\prod_{k=p}^{q} v_k)$$

$$\bullet \prod_{k=p}^{q} (\lambda u_k) = \lambda^{q-p+1} \prod_{k=p}^{q} u_k$$

Proposition 2.6. Changement d'indice dans un produit.

La changement d'indice k = l - p laisse le produit inchangé :

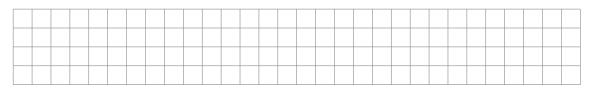
$$\prod_{k=0}^{n} u_k = \prod_{l=p}^{n+p} u_{l-p}$$

**Application 2.7.** Exprimer sans le symbole  $\prod$ :

1. 
$$\prod_{i=0}^{10} \left(\frac{2}{5}\right)^i \times \prod_{i=0}^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^i$$

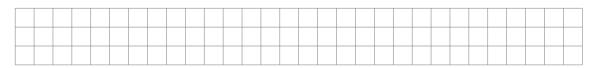
3. 
$$\prod_{i=2}^{9} (2 \times 3^i)$$

2. 
$$\prod_{k=0}^{9} 4^k$$



**Application 2.8.** Donner une autre écriture du produit  $P = \prod_{k=4}^{30} 3^{k-3}$  à

l'aide du symbole  $\prod$ .



Proposition 2.9.

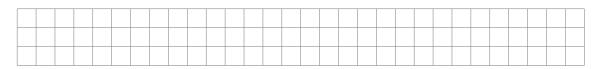
• 
$$exp(\sum_{k=0}^{n} u_k) = \prod_{k=0}^{n} e^{u_k}$$

• On suppose que  $u_k > 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , alors :

$$ln(\prod_{k=0}^{n} u_k) = \sum_{k=0}^{n} ln(u_k)$$

Proposition 2.10. Il existe également une notion de produit télescopique.

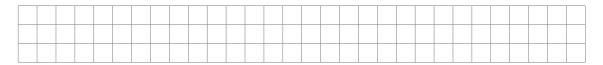
Pour 
$$p \le n$$
,  $\prod_{k=p}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_p}$ .



**Application 2.11.** Exprimer en fonction de n et sans les symboles  $\prod$  et  $\sum$ :

1. 
$$\prod_{k=0}^{n} exp(3k)$$

2. 
$$\sum_{i=1}^{n} ln(5 \times \frac{i+1}{i})$$



## 3 Triangle de pascal et binôme de Newton

#### 3.1 Factorielle d'un entier et coefficients binomiaux

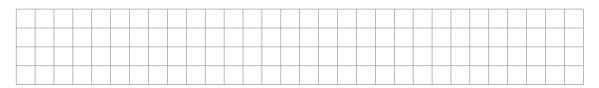
**Définition 3.1.** On appelle factorielle de  $n \in \mathbb{N}$  le nombre entier que l'on note n! et que l'on lit "factorielle n" par :

$$0! = 1 \ et \ si \ n \neq 0, \ n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$$

**Application 3.2.** Soit  $n \geq 4$ , simplifier les écritures :

1. 
$$Q_1 = \frac{(n+2)!}{3!(n-4)!}$$

2. 
$$Q_2 = \sum_{i=1}^{n} ln(2i)$$



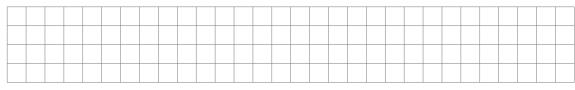
Définition 3.3. Les coefficients binomiaux sont les entiers naturels notés  $\binom{n}{p}$  et qui se lisent "p parmi n", définis par :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p! \times (n-p)!} & si \ 0 \le p \le n \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

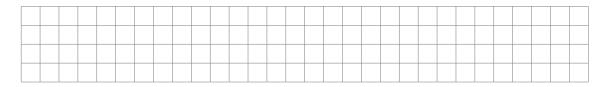
• 
$$\binom{n}{0} = 1$$
,  $\binom{n}{1} = n$  et  $\binom{n}{n} = 1$ 

**Proposition 3.4.** • 
$$\binom{n}{0} = 1$$
,  $\binom{n}{1} = n$  et  $\binom{n}{n} = 1$  •  $\forall p \in [0; n], \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ 

Preuve:



**Application 3.5.** Calculer  $A = \binom{9}{4}$ ,  $B = \binom{100}{99}$  et  $C = \binom{102}{2}$ .



Proposition 3.6. Relation de Pascal.

Soit un entier naturel n et  $1 \le k \le n-1$ , alors :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Définition 3.7. Le triangle de Pascal.

#### 3.2 Binôme de Newton

Théorème 3.8. 
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

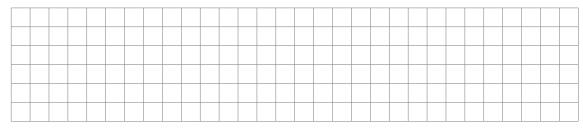
Développez les expressions suivantes :

1. 
$$(3x+2)^3$$

3. 
$$(3-4x)^3$$

2. 
$$(2x-1)^4$$

4. 
$$(2x+3)^5$$



Application 3.9. Exprimer en fonction de n les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

$$3. \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

$$2. \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

4. 
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 5^{n-k}$$

