

Chap.12 : Calcul de sommes et de produits

Dans tout ce qui suivra, n, p et q désigneront des entiers naturels et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignera une suite de nombres réels ou complexes.

1 Sommes finies

1.1 La notation de sommation

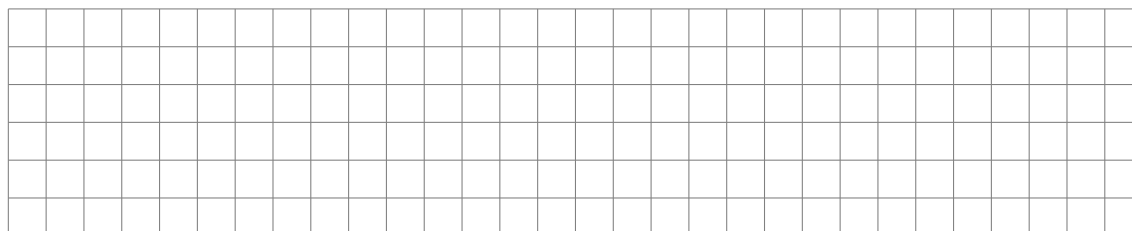
Définition 1.1. La somme $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ des $n + 1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est notée : $\sum_{k=0}^n u_k$.

On dit que la "variable" k est l'indice de la somme ou que la somme est indexée par k .

La somme $u_p + u_1 + \dots + u_q$ des termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les indices sont compris entre p et q où $p \leq q$ est notée : $\sum_{k=p}^q u_k$.

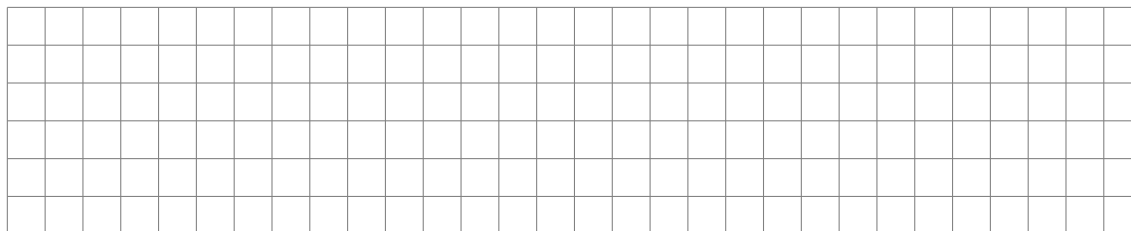
Application 1.2. Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole \sum :

1. $S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{15}$
2. $S_2 = 4^3 + 5^3 + \dots + 59^3$
3. $S_3 = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{37}{38}$
4. $S_4 = 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots + 23 \times 24$
5. $S_5 = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 1024$



Application 1.3. Écrire explicitement les sommes :

$$S_1 = \sum_{i=0}^5 \frac{1}{2i+2}, S_2 = \sum_{i=2}^6 \frac{i^2}{3i-2} \text{ et } S_3 = \sum_{k=1}^6 \cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)$$



1.2 Sommes à connaître

Proposition 1.4. • $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

• $\forall q \in \mathbb{R} - \{1\}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

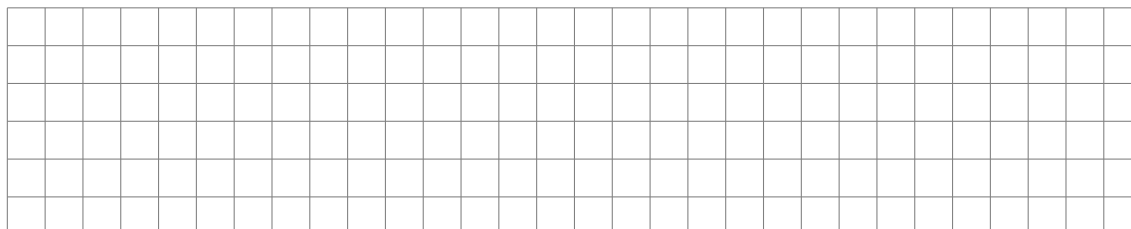
Application 1.5. Calculer les sommes suivantes en donnant le résultat sous forme fractionnaire :

1. $S_1 = \sum_{k=1}^{70} 3k$

3. $S_3 = \sum_{k=0}^8 \frac{1}{e^k}$

2. $S_2 = \sum_{k=0}^7 (-3)^k$

4. $S_4 = \sum_{k=0}^6 \left(\frac{-3}{10}\right)^k$



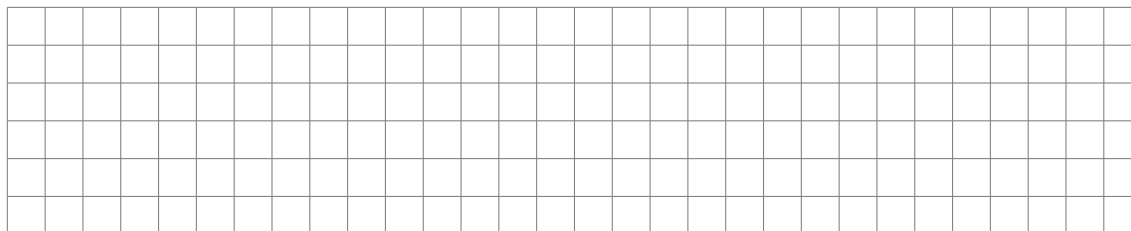
1.3 La relation de Chasles pour une somme finie

Proposition 1.6. Pour tout entier naturel $n_0 \in \llbracket p, q \rrbracket$ avec $p < q$, alors :

$$\sum_{k=p}^q u_k = \sum_{k=p}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^q u_k$$

Proposition 1.7. $\forall q \in \mathbb{R} - \{1\}, \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, m \leq n, \sum_{k=m}^n q^k = q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$

Preuve :



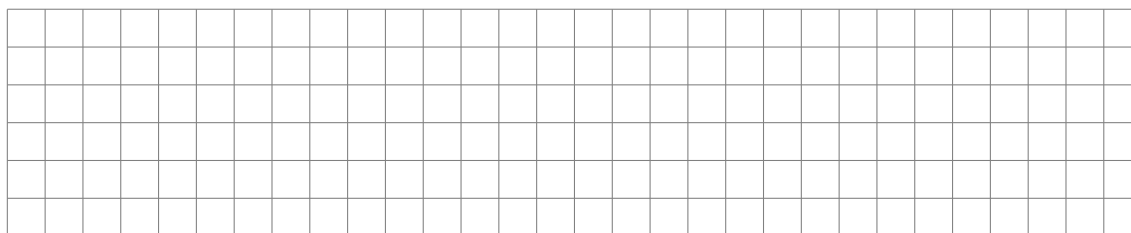
Application 1.8. Calculer les sommes suivantes en donnant le résultat sous forme fractionnaire :

$$1. S_1 = \sum_{i=12}^{30} i$$

$$3. S_3 = \sum_{k=4}^{10} \frac{1}{5^k}$$

$$2. S_2 = \sum_{k=3}^{12} (-2)^k$$

$$4. S_4 = \sum_{k=4}^{11} \left(-\frac{1}{5}\right)^k$$



1.4 Linéarité

Proposition 1.9. • $\sum_{k=p}^q (u_k + v_k) = \sum_{k=p}^q u_k + \sum_{k=p}^q v_k$

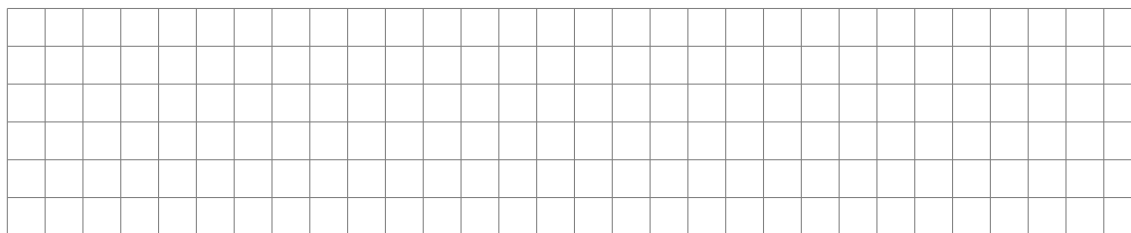
• $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \sum_{k=p}^q \lambda u_k = \lambda \sum_{k=p}^q u_k$

Application 1.10. Exprimer en fonction de n les sommes :

$$1. S_1 = \sum_{k=0}^n (3k)$$

$$3. S_3 = \sum_{k=1}^n (3k - 4)$$

$$2. S_2 = \sum_{k=0}^n (5k - 5^k)$$



1.5 Changement d'indice dans une somme

On peut parfois être amené à effectuer un « changement d'indice » dans une somme. Voici un exemple.

On part de la somme $\sum_{k=0}^6 u_k$ et on effectue le changement d'indice $k = l - 2$,

alors $l = k + 2$ et :

k	1	2	3	4	5	6
$l = k + 2$	3	4	5	6	7	8

Ainsi, le nouvel indice va de $1 + 2 = 3$ à $6 + 2 = 8$.

$$\text{D'où : } \sum_{k=1}^6 u_k = \sum_{l=3}^8 u_{l-2}$$

Proposition 1.11. $\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{l=p}^{n+p} u_{l-p}$

Méthode 1.12. Pour effectuer un changement d'indice dans une somme indexée par l'indice k :

1. on identifie la relation entre l'ancien indice k et le nouvel indice l ;
2. à l'aide des bornes de l'ensemble d'indexation de k , on détermine l'ensemble d'indexation de l ;
3. on écrit le symbole \sum avec le nouvel indice l et ses nouvelles bornes ;
4. dans le terme général de la somme, on remplace k par son expression en fonction de l .

Application 1.13. Dans chacun des cas suivants, effectuer le changement de variable demandé dans la somme S :

1. $S = \sum_{k=1}^{10} k^2$ en posant $l = k - 1$
2. $S = \sum_{l=3}^8 3l + 1$ en posant $n = l - 3$
3. $S = \sum_{m=2}^{10} \frac{2m}{m+3}$ en posant $k = m - 2$

2.2 Opérations sur les produits

Proposition 2.4. *Relation de Chasles.*

Pour tout entier $n_0 \in \llbracket p; q \rrbracket$ avec $p < q$, on a :

$$\prod_{k=p}^q u_k = \left(\prod_{k=p}^{n_0} u_k \right) \times \left(\prod_{k=n_0+1}^q u_k \right)$$

Proposition 2.5. Si $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une autre suite de nombres réels ou complexes, et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

- $\prod_{k=p}^q (u_k \times v_k) = \left(\prod_{k=p}^q u_k \right) \times \left(\prod_{k=p}^q v_k \right)$
- $\prod_{k=p}^q (\lambda u_k) = \lambda^{q-p+1} \prod_{k=p}^q u_k$

Proposition 2.6. *Changement d'indice dans un produit.*

La changement d'indice $k = l - p$ laisse le produit inchangé :

$$\prod_{k=0}^n u_k = \prod_{l=p}^{n+p} u_{l-p}$$

Application 2.7. *Exprimer sans le symbole \prod :*

- $\prod_{i=0}^{10} \left(\frac{2}{5}\right)^i \times \prod_{i=0}^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^i$
- $\prod_{k=0}^9 4^k$
- $\prod_{i=2}^9 (2 \times 3^i)$

Application 2.8. Donner une autre écriture du produit $P = \prod_{k=4}^{30} 3^{k-3}$ à

l'aide du symbole \prod .

Proposition 2.9. • $\exp\left(\sum_{k=0}^n u_k\right) = \prod_{k=0}^n e^{u_k}$

• On suppose que $u_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors :

$$\ln\left(\prod_{k=0}^n u_k\right) = \sum_{k=0}^n \ln(u_k)$$

Proposition 2.10. Il existe également une notion de produit télescopique.

Pour $p \leq n$, $\prod_{k=p}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_p}$.

Application 2.11. Exprimer en fonction de n et sans les symboles \prod et \sum :

1. $\prod_{k=0}^n \exp(3k)$

2. $\sum_{i=1}^n \ln\left(5 \times \frac{i+1}{i}\right)$

3 Triangle de pascal et binôme de Newton

3.1 Factorielle d'un entier et coefficients binomiaux

Définition 3.1. On appelle factorielle de $n \in \mathbb{N}$ le nombre entier que l'on note $n!$ et que l'on lit "factorielle n " par :

$$0! = 1 \text{ et si } n \neq 0, n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

Application 3.2. Soit $n \geq 4$, simplifier les écritures :

